Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Физический факультет

НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

ЛОМОНОСОВСКИЕ ЧТЕНИЯ

Секция физики

Апрель 2017 года

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Физический факультет

НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

ЛОМОНОСОВСКИЕ ЧТЕНИЯ

Секция физики

17–26 апреля 2017 года

СБОРНИК ТЕЗИСОВ ДОКЛАДОВ

Москва
Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова
2017 г.

ЛОМОНОСОВСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2017. СЕКЦИЯ ФИЗИКИ. Сборник тезисов докладов. — М., Физический факультет МГУ, 2017 г. 276 с.

Семнадцатый год издаётся на физическом факультете сборник тезисов докладов конференции «Ломоносовские чтения».

Этот год явился рекордным по количеству предлагаемых докладов. Их около 90. Они будут сделаны на заседаниях десяти подсекций секции «Физика». Соавторами этих докладов являются около 250 научных сотрудников и преподавателей, и не только физического факультета. Почти 40 докладов сделаны в соавторстве с сотрудниками институтов Российской академии наук и научных центров, совместные работы с которыми ведёт физический факультет.

Как и в прошлые годы, наиболее глубокие по научному содержанию доклады будут представлены на университетские премии имени М.В. Ломоносова и имени И.И. Шувалова.

В программу конференции также включены доклады, подготовленные на основе недавно защищенных или готовых к защите докторских диссертаций, что позволяет слушателям конференции ознакомиться с самыми актуальными научными исследованиями, проводимыми в стенах физического факультета.

Руководство факультета с признательностью встретит любые пожелания по улучшению организации конференции «Ломоносовские чтения».

Сборник составлен научным отделом физического факультета МГУ.

Профессор *Н.Н.Сысоев*

Подсекция:

ОПТИКА И ЛАЗЕРНАЯ ФИЗИКА

Сопредседатели
профессор В. А. Макаров, профессор П. В. Короленко,
профессор А. В. Андреев

ГЕНЕРАЦИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИ ПОЛЯРИЗОВАННОГО ТЕРАГЕРЦОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПРОТЯЖЕННЫМИ ГАЗОВЫМИ СРЕДАМИ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИМИ С ДВУХЧАСТОТНЫМИ ЛАЗЕРНЫМИ ПОЛЯМИ

Асс. *С.Ю. Стремоухов,* проф. *А.В. Андреев*
e-mail: sustrem@gmail.com

В работе представлены результаты теоретических исследований генерации эллиптически поляризованного терагерцового (ТГц) излучения в двухчастотных лазерных полях, образованных линейно поляризованными первой и второй гармониками Ti:Sapphireлазера фемтосекундной длительности.Исследования велись на двух пространственных масштабахвзаимодействия: с использованием непертурбативного подхода [1, 2]изучались свойства ТГц излучения, полученного в результате взаимодействия одиночного атома аргона с двухчастотным полем при вариации угла между поляризациями компонент двухчастотного поля, кроме того, на основе полученной информации о параметрах ТГц излучения одиночного атома были изучены свойства ТГц отклика протяженной газовой среды [3]. Было показано, что ТГц излучение протяженной газовой среды обладает конической эмиссией. Изучено пространственное распределение ТГц излучения, его поляризационныхсвойств (эллиптичности, степеней эллиптичности и поляризации) при вариации геометрических размеров среды (длины, ширины), пространственных профилей пучка, параметров двухчастотного лазерного поля (угла между поляризациями компонент поля, временной задержки между импульсами на входе в газовую среду).

В результате проведенных исследований были получены следующие результаты:

- Впервые квантово-механическина атомарном уровне доказано, что в двухчастотных линейно — поляризованных полях низкочастотная часть ТГц спектра (< 20 ТГц) обладает линейной поляризацией.
- Показано, что в высокочастотной области спектра(> 20 ТГц) существуют области вариации угла между поляризациями компонент поля, при которых генерируемое одиночным атомом ТГц излучение обладает высокой эллиптичностью.
- Предложено три способа оптимизации параметров ТГц излучения (эллиптичности, напряженности) протяженной газовой среды: за счет оптимизации относительной фазы между компонентами двухчастотного лазерного поля; за счет вариации геометрических размеров среды; за счет пространственного профилирования лазерного пучка с использованием диафрагмы, пропускающей центральную часть пуска, и маски, пропускающей периферийную часть пучка.

- Сравнение результатов, полученных при вариации пространственного распределения лазерного пучка, позволяет сделать вывод о вкладе центральной и периферийной частей пучка в пространственное распределение ТГц излучения.

Проведенные исследования дополняют существующие методы исследования генерации ТГц излучения, основанные тензорном представлении поляризации отклика ТГц излучения газовых сред [4].

Работа выполнена причастичной финансовой поддержки грантов РФФИ №16-32-00723 и 15-02-04352.

Литература

1. A.V. Andreev, R.A. Ganeev, H. Kuroda, S.Yu Stremoukhov, O.A. Shoutova, “High-order harmonic cut-off frequency in atomic silver irradiated by femtosecond laser pulses: theory and experiment”, Eur. Phys. J. D, 67: 22 (2013).
2. A.V. Andreev, S.Yu. Stremoukhov, “Terahertz-radiation generation in the ionization-free regime of light-atom interaction”, Phys. Rev. A, 87, 053416 (2013).
3. S. Stremoukhov, A. Andreev, “Quantum-mechanical fingerprints in generation of elliptical terahertz radiation by extended media interacting with two-color laser field”, Journal of the Optical Society of America B: Optical Physics, 34(2), 232–237 (2017).
4. M. Esaulkov, O. Kosareva, V. Makarov, N. Panov, and A. Shkurinov, Simultaneous generation of nonlinear optical harmonics and terahertz radiation in air: polarization discrimination of various nonlinear contributions, Frontiers of Optoelectronics in China, 8, 73–80 (2015).

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ РЕЗОНАНСНОМ РАССЕЯНИИ СВЕТА ЦИЛИНДРОМ С БОЛЬШИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Асс. *С.Е. Сваховский,* доц. *В.В. Терновский,* проф. *М.И. Трибельский*

В работе представлено 2D моделирование нестационарных процессов взаимодействия фемтосекундного лазерного импульса с цилиндром наноразмерных масштабов в окрестности резонансов Ми высокой добротности. При помощи численного решения уравнений Максвелла методом конечных разностей во временной области выполнено моделирование распределения электрического и магнитного полей, плотности энергии электромагнитного излучения, а также поля вектора Пойнтинга

Детально изучен нестационарный процесс формирования электромагнитного поля в ближней волновой зоне и внутри цилиндра от начала действия импульса вплоть до выхода на стационарный режим рассеяния при дипольном резонансе Ми первого порядка как для s-, так и для p-поляризации падающего излучения. При выходе на стационарный режим, происходящем по прошествии порядка 100 периодов колебаний поля, полученное распределение поля соответствует известному точному аналитическому решению задачи. Показано, что в процессе выхода на стационарный режим происходит качественное изменение топологической структуры поля в ближней волновой зоне и внутри цилиндра, сопровождающееся возникновением особых точек различного типа и их перемещением в пространстве.

Исследован механизм накачки энергии внутрь цилиндра. Показано, что накачка энергии начинается с существенной задержкой, составляющей порядка 20 периодов поля от начала действия импульса, достигает максимума по прошествии порядка еще двадцати периодов, после чего спадает до нуля в стационарном состоянии.

Исследован обратный процесс высвечивания запасенной энергии при выключении внешнего поля, который также сопровождается соответствующими изменениями топологической структуры поля в ближней волновой зоне и внутри частицы.

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ОПТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК АППРОКСИМАНТОВ ФРАКТАЛЬНЫХ АПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР

С.н.с. Рыжикова Ю.В., проф. Короленко П.В., доц. С.Б. Рыжиков

В настоящее время широкий круг физических задач решается на основе использования фрактальных представлений. В частности, фрактальный анализ применяется для оптимизации параметров апериодических дифракционных решеток и многослойных систем. Несмотря на значительное число публикаций, посвященных изучению характеристик апериодических структур [1], оптические свойства их аппроксимантов не изучены в полной мере. В простейшем случае аппроксиманты представляют собой блочные системы вида: $\mathrm{A}_l = \{S_l\}^p$, где $S_l = \{A, B\}$ — элементарная ячейка аппроксиманта, l — уровень генерации, используемой числовой апериодической последовательности (Кантора, Фибоначчи и др.), A и B — элементы последовательности, p — порядок аппроксиманта, определяемый количеством элементарных ячеек. Исследование различных свойств аппроксимантов, занимающих промежуточное положение между апериодическими и периодическими системами, представляет, как практический, так и общенаучный интерес. Замена апериодических систем на их аппроксиманты приводит к возможности получения сходных по своей структуре оптических характеристик [2–3], что позволяет существенно упростить производство структур с наперед заданными свойствами.

Применительно к рассматриваемым структурам аппроксиманты можно разделить на два типа по способу их построения. Первый тип аппроксимантов структур представляет собой $\mathrm{A}_l^{(1)} = \mathrm{A}_l = \{S_l\}^p$. Второй тип аппроксимантов $\tilde{\mathrm{A}}_{l'}^{(2)} = \{\tilde{S}_{l'}\}^p$ представляет последовательность элементарных ячеек $\tilde{S}_{l'}$ ($\tilde{S}_{l'} \neq S_l$), апериодическая структура которых может варьироваться в широких пределах без нарушения общего принципа построения исходной числовой последовательности. Индекс l' — аналог l — определяет степень сложности элементарной ячейки. В частности, ко второму типу были отнесены аппроксиманты, полученные методом проецирования [4].

В данной работе показана эквивалентность по форме оптических характеристик аппроксимантов разных типов фрактальных апериодических структур (на примере использования числовых последовательностей двойного периода, Морса-Туэ, Фибоначчи, ряда металлических сечений [1, 5]). Это позволяет дополнить анализ устойчивости фрактальных свойств апериодических структур и их аппроксимантов к возможным детерминированным и случайным изменениям их структуры [2–3, 6]. В рамках проведенного анализа выявлена структурная схожесть отдельных фрагментов (паттернов [7]) спектральных характеристик апериодических систем Кантора, Морса-Туэ, Фибоначчи разной физической природы (картины дифракции, спектры пропускания многослойных систем). На рис. 1, *а* приведены структуры, построенные с использованием метода проецирования [4].

В основу геометрических построений положена возможность получения картин дифракции, соответствующих полям рассеяния на квазипериодических структурах, при освещении периодических 2D-структур световыми пучками под определенным углом к их образующим слоям. Отметим, что дифракционные картины, характерные для структур с геометрией Фибоначчи, могут быть получены при угле наклона падения излучения на образующий слой $\theta = arctg(1/\tau)$, где $\tau = (1+\sqrt{5})/2$ — коэффициент золотого сечения (рис. 1, *б*). При рациональных значениях τ, получаем периодические структуры (рис. 1, *а*) и соответствующие им фурье-образы (рис. 1, *г*). Из рис. 1, *б* видно, что распределение амплитуды A_q в поле дифракции волны на решетке Фибоначчи совпадает по форме с аналогичным распределением A_q, соответствующим 1D решеткам Фибоначчи, сформированным блочным методом [1]. Рис. 1, *в* показывает структурное совпадение распределений амплитуды A_q решетчатой структуры 1 (рис. 1, *а*) и ее аппроксиманта $\mathrm{A}_5^{(1)} = \{S_5\}^{10}$, элементарная ячейка которого состоит из 13 элементов.

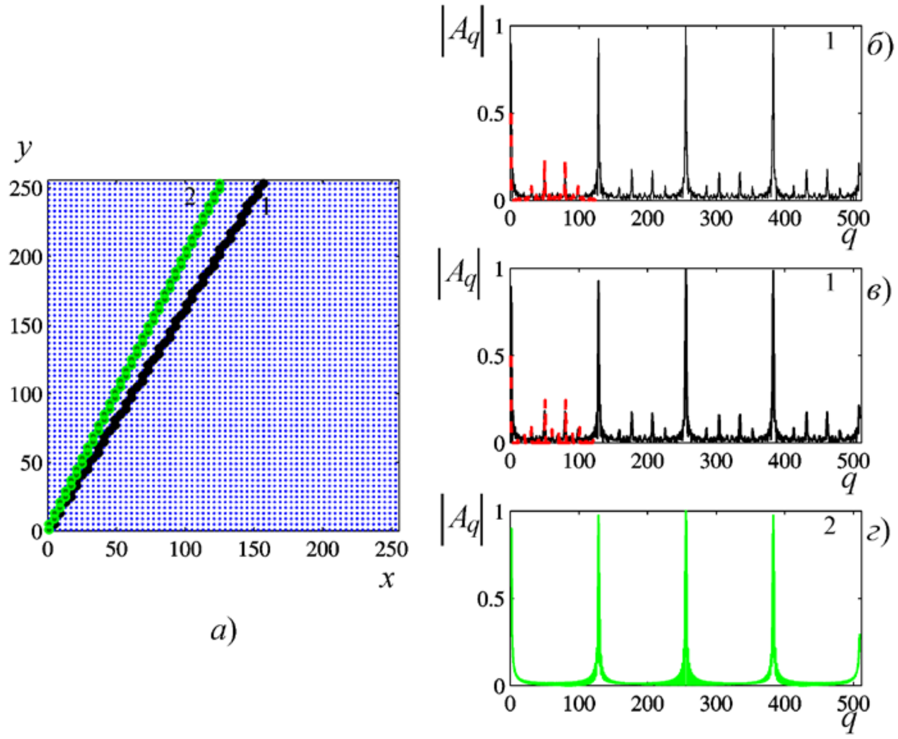


Рис. 1. Решетчатые структуры (*а*) и распределение амплитуды A_q (*б-г*) в поле дифракции волны на решетке Фибоначчи с $\tau = (1+\sqrt{5})/2$ (1) и $\tau = 2$ (2). q — пространственная частота. Пунктиром показаны распределения амплитуды A_q на решетке Фибоначчи, полученной блочным методом (*б*) и на ее аппроксиманте $\mathrm{A}_5^{(1)}$ (*в*).

Результаты численного моделирования показали, что фурье-образы рассматриваемых апериодических систем обладают выраженными скейлинговыми свойствами и имеют фрактальный характер. В качестве примера на рис. 2 показаны фурье-образы 1D аппроксимантов разных типов, геометрия которых соответствует принципу, так называемого, серебряного сечения [5].

Коэффициенты скейлинга ς в фурье-образе определялись отношением самоподобных элементов в его структуре, так для систем на рис. 2 — $\varsigma \approx 2{,}4$. Из рис. 2 видна структурная эквивалентность распределение амплитуды A_q фурье-спектров аппроксимантов первого и второго типа решетчатых систем. Аналогичным свойством обладают системы аппроксимантов Фибоначчи, Морса-Туэ и двойного периода.

Проведенное исследование показало, что и для многослойных систем и для решеток, структура оптических характеристик апериодических систем и их аппроксимантов характеризуется наличием сходных по форме отдельных фрагментов. При этом было установлено, что, несмотря, на внешние отличия, аппроксиманты с разными уровнями генерации элементарных ячеек характеризуются одинаковой формой паттернов и одинаковыми значениями коэффициентов скейлинга ς.

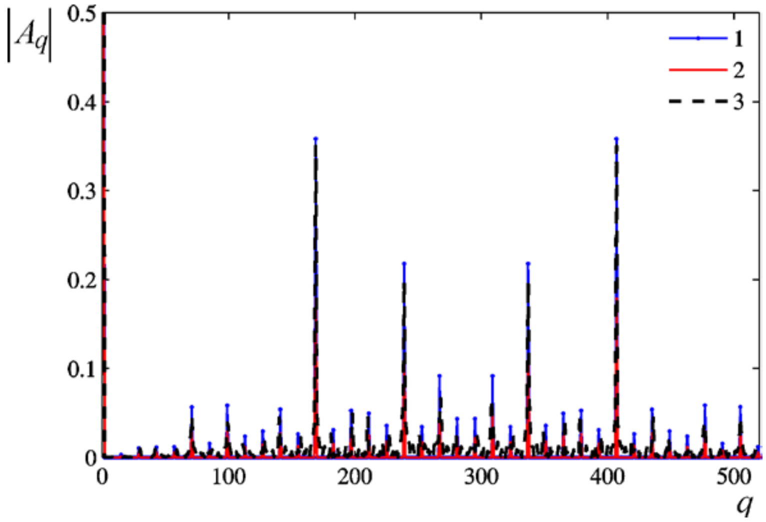


Рис. 2. Распределение амплитуды A_q в поле дифракции волны на решетке (3) и ее аппроксимантах первого (2) и второго (1) типов с геометрией, соответствующей принципу серебряного сечения. Число элементов решетчатых структур $J = 574$. Элементарная ячейка аппроксимантов состоит из 41 элемента.

Рассмотренные вопросы находится в русле решения общетеоретической проблемы фрактальной оптики, связанной с нахождением общих закономерностей между структурными особенностями объектов и фрактальностью их характеристик. Ее решение применительно к аппроксимантам разных типов позволит установить единые критерии для идентификации широкого класса апериодических объектов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №16-32-00386 мол_а.

Литература

1. Negro L.D. “Optics of Aperiodic Structures – Fundamentals and Device Applications”. CRC Press Taylor & Francis Group, 2014.
2. Короленко П.В., Логачев П.А., Рыжиков С.Б., Рыжикова Ю.В. // Физические основы приборостроения. 2014. Т. 3. № 3. С. 66.
3. Korolenko P.V., Logachev P.A., Ryzhikova Yu.V. // Phys.Wave Phenom. 2015. V. 23. №1. P. 46.
4. Tsai An Pang // Sci. Technol. Adv. Mater. 2008. V. 9. P. 013008 (1–20).
5. Stakhov A.P. // Applied Mathematics. 2014. V. 5. P. 363.
6. Давыдова М.Г., Короленко П.В., Рыжикова Ю.В. // Вестник Моск. Ун-та. Серия 3. Физика, астрон. 2016. №4. С. 56.
7. Korolenko P.V., Ryzhikov S.B., Ryzhikova Yu.V. // Phys.Wave Phenom. 2013. V. 21. No. 4. P. 256.

АНИЗОТРОПНОЕ МИКРО- И НАНОСТРУКТУРИРОВАНИЕ ПЛЕНОК АМОРФНОГО КРЕМНИЯ ФЕМТОСЕКУНДНЫМИ ЛАЗЕРНЫМИ ИМПУЛЬСАМИ

доц. *С.В. Заботнов,* асп. *Д.В. Шулейко,* ст. преп. *А.В. Павликов,*
с. н. с. *Д.Е. Преснов,* гл. н. с. *А.Г. Казанский,* зав. каф. *П.К. Кашкаров*

Аморфный гидрогенизированный кремний (a-Si:H), модифицированный фемтосекундными лазерными импульсами, представляет интерес для тонкопленочной солнечной энергетики. Обработка пленок a-Si:H сверхкороткими лазерными импульсами позволяет получить однородно распределенные по объему пленки нанокристаллы кремния [1], что приводит к росту проводимости, а также уменьшает наблюдаемый в таких системах эффект Стеблера-Вронского. Кроме того, при фемтосекундной лазерной обработке может быть достигнута анизотропия структурных, оптических и электрофизических свойств материала. В частности, под действием сверхкоротких лазерных импульсов, на поверхности пленок a-Si:H могут быть получены периодические структуры за счет возбуждения плазмон-поляритонов [2].

В данной работе были исследованы пленки a-Si:H толщиной 600 нм, модифицированные фемтосекундными лазерными импульсами (λ = 1250 нм, τ = 125 фс, E = 130 мкДж, f = 10 Гц). Обработка поверхности пленок производилась в растровом режиме с фокусировкой пучка в пятно диаметром ~ 300 мкм, а также с различной скоростью сканирования пленки пучком излучения, за счет чего изменялась степень наложения облученных областей от двух последовательных импульсов, что определяло общее число перекрытий в пределах одного сфокусированного лазерного пятна.

Методом сканирующей электронной микроскопии (СЭМ) было показано, что на обработанной поверхности формируются микроструктуры различного типа, представляющие собой одномерные решётки, ориентированные перпендикулярно или параллельно вектору поляризации фемтосекундного излучения в зависимости от условий обработки (рис. 1 а, б), и имеющие период 1.20±0.02 мкм. При этом ориентация данных структур определяется направлением вектора поляризации использованного лазерного излучения и не зависит от направления сканирования пленки пучком.

Во всех модифицированных фемтосекундными лазерными импульсами образцах происходила нанокристаллизация пленок, что подтверждено исследованием спектров комбинационного рассеяния света (КРС). В спектрах КРС образцов, обработанных при плотности потока энергии 0.14 Дж/см^2 и числе перекрытий импульсов более 500, наблюдается группа пиков, соответствующих полиморфным модификациям кремния Si-III (кубическая объёмно-центрированная) и Si-XII (ромбоэдрическая) [3] (рис. 2 а). Кроме того, обнаружено, что интенсивность данных пиков изменяется до 5 раз при варьировании поляризации излучения накачки (рис. 2 б).

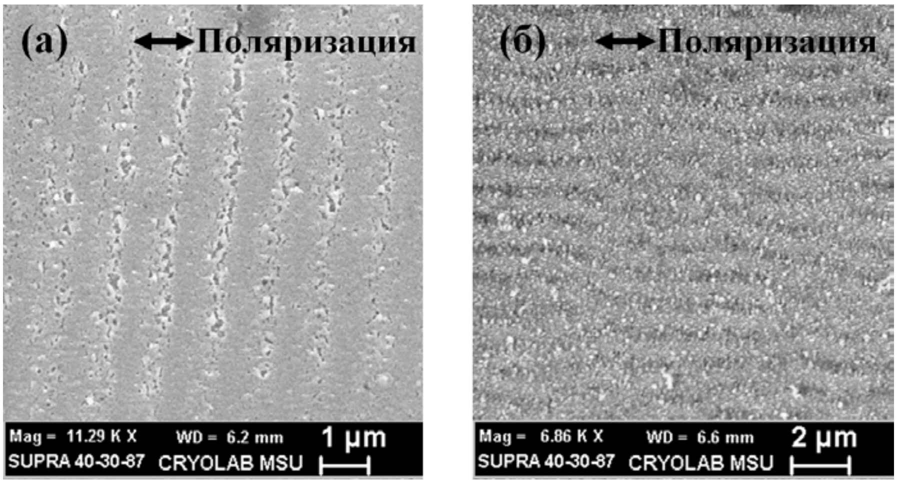


Рис. 1. Изображения поверхности пленки a-Si:H, обработанной фемтосекундными лазерными импульсами с плотностью потока энергии 0.14 Дж/см^2 и числом перекрытий лазерных импульсов 70 (а) и 600 (б), полученные методом СЭМ.

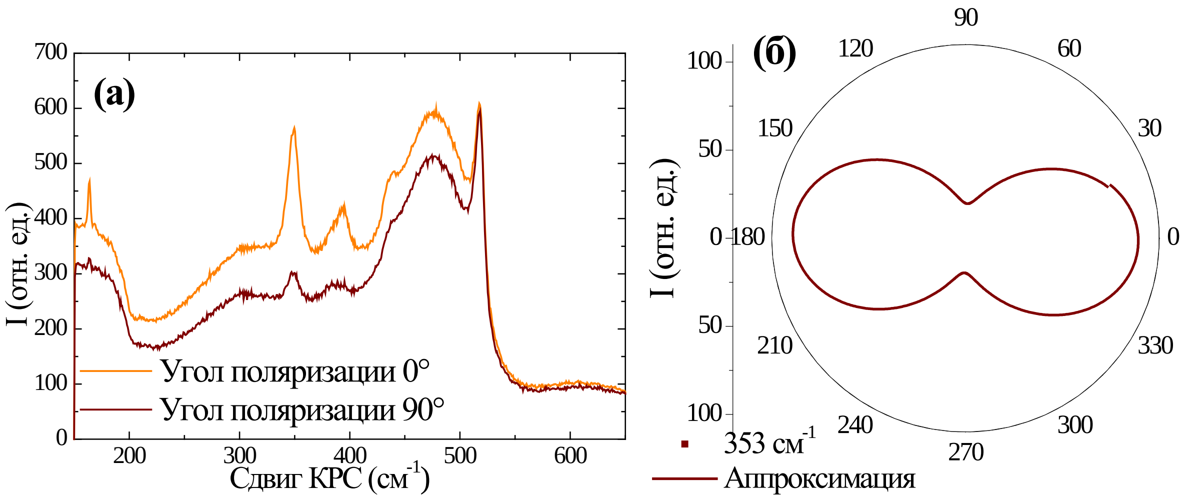


Рис. 2. Спектр КРС пленки a-Si:H, модифицированной фемтосекундными лазерными импульсами с плотностью потока 0.14 Дж/см^2 и числом перекрытий лазерных импульсов 500 (а); поляризационная зависимость интенсивности пика КРС, соответствующего полиморфной модификации Si-III (б).

Электрофизические измерения показали, что величина удельной проводимости аморфного гидрогенизированного кремния после обработки фемтосекундным лазерным излучением выросла на 3 порядка: с ~ 10^{-9} до ~ 10^{-6} (Ом·см)$^{-1}$, что объясняется нанокристаллизацией и дегидрогенизацией пленки a-Si:H, когда под действием сверхкоротких импульсов высокой мощности происходит разрыв Si–H связей и образование кремниевых нанокристаллов [1]. Кроме того, обнаружена анизотропия проводимости облученной поверхности: вдоль направления сканирования подложки лазерным лучом значение удельной проводимости почти в 3 раза превышает величину удельной проводимости для перпендикулярного сканированию направления. Наблюдаемые особенности могут быть объяснены как неравномерной кристаллизацией a-Si:H за счет гауссова распределения энергии в поперечном сечении пучка лазерного излучения, так и анизотропией формы поверхностных решёток. Доля нанокристаллической фазы в модифицированных фемтосекундными лазерными импульсами пленках a-Si:H, рассчитанная в рамках модели эффективной среды, с учетом деполяризующего влияния поверхностной структуры, находится в согласии с данными спектроскопии КРС.

Таким образом, в данной работе показано, что модификация пленок a-Si:H при помощи сверхкоротких лазерных импульсов позволяет достичь анизотропии структурных и электрофизических свойств, а также получить полиморфные модификации кристаллического кремния в объеме пленки. Подобные анизотропные структуры на основе a-Si:H могут быть использованы для создания поляризационно-чувствительных элементов оптики и фотовольтаики.

Литература

1. A.V. Emelyanov, M.V. Khenkin, A.G. Kazanskii et al. Femtosecond laser induced crystallization of hydrogenated amorphous silicon for photovoltaic applications. // Thin Solid Films – 2014 – V. 556. – P.: 410–413.
2. R. Drevinskas, M. Beresna, M. Gecevičius et al. Giant birefringence and dichroism induced by ultrafast laser pulses in hydrogenated amorphous silicon. // Appl. Phys. Letters – 2015 – V. 106. – Art. 171106.
3. J. Reif, F. Costache, S. Kouteva-Arguirova. Femtosecond laser-induced nanostructuring and phase transformation. // Proceedings of SPIE. Bellingham – 2004 – P.: 756–764.

ОСОБЕННОСТИ КРАЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ SiO_2

В.Н. Колобанов, И.А. Марков, П.П. Шванский

Исследуемые высококачественные кристаллы оптического кварца были получены в ВНИИСИМС (г. Александров) с помощью гидротермального метода.

Измерения проводились с учетом анизотропии. Кристаллы SiO_2 были ориентированы относительно оптической оси параллельно и перпендикулярно основной компоненте поляризации синхротронного излучения. Измерены спектры возбуждения и излучения люминесценции, времена затухания люминесценции, а также спектры отражение. Измерения были проведены в диапазоне энергий фотонов 4–30 эВ, т.е. на краю и в области фундаментального поглощения. Область края коротковолновой прозрачности высококачественного монокристалла SiO_2, расположенная около 146 нм (8.5 эВ) при комнатной температуре и сдвинутая к 143 нм (8.66 эВ) около температуры жидкого гелия.

Обсуждается люминесцентная природа и особенности электронной зонной структуры монокристаллов SiO_2.

НОВЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ РЕЗОНАНСНОМ РАССЕЯНИИ СВЕТА ЧАСТИЦАМИ С БОЛЬШИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Проф. *М. И. Трибельский*

Представлен краткий обзор теоретических и экспериментальных результатов автора по рассеянию света субволновыми частицами с большим коэффициентом преломления и малой диссипацией. Такое рассеяние сопровождается возбуждением острых резонансов Ми, которые приводят к существенным дифракционным искажениям электромагнитного поля, как внутри частицы, так и вне ее. Вне частицы каждая парциальная мода может быть представлена как суперпозиция бесконечных каскадов резонансов Фано. Выяснена природа этих резонансов. Приведены простые соотношения, непосредственно выражающие параметры асимметричной линии Фано через фундаментальные параметры задачи рассеяния (размер частицы, волновое число падающего излучения и комплексный коэффициент преломления). Внутри частицы резонансы характеризуются традиционной лоренцевской формой линии, однако амплитуда резонансов может быть очень велика, а резонансы различных порядков могут существенно перекрываться. Это создает условия для гигантского (на порядки величин) усиления поля внутри такой частицы, а также для управления контрастом этого поля. Указанные свойства открывают новые возможности для использования таких частиц в качестве многофункциональных элементов оптических сетей, а также для создания нелинейных гетерогенных наноструктур и других метаматералов.

Литература

1. Michael I.Tribelsky, and Boris S. Luk’yanchuk Light Scattering by Small Particles and Their Light Heating: New Aspects of the Old Problems in Fundamentals of Laser - Assisted Micro- and Nanotechnologies Eds., V. P. Veiko, and V. I. Konov, Springer Series in Materials Science, Vol. 195., XVII, (Springer, Berlin, Tokyo, etc., 2014) 322 p.; pp. 125–146.
2. Michael I. Tribelsky. Peculiarities of Light Scattering by Particles with High Refractive Index, J. Opt. Technol., in press.
3. Polina Kapitanova, Vladimir Ternovski, Andrey Miroshnichenko, Nikita Pavlov, Pavel Belov, Yuri Kivshar, and Michael Tribelsky. *Giant field enhancement in subwavelength dielectric particles*, Sci. Rep., in press.
4. Michael I. Tribelsky, Jean-Michel Geffrin, Amelie Litman, Christelle Eyraud, and Fernando Moreno, *Directional Fano Resonances at Light Scattering by a High Refractive Index Dielectric Sphere,* Phys. Rev. B, **94**, 121110(R) (2016).
5. Michael I. Tribelsky, and Yasuhide Fukumoto *Laser Heating of Dielectric Particles for Medical And Biological Applications,* Biomed. Opt. Express **7**(7), 2781–2788 (2016).
6. Michael I. Tribelsky, and Andrey E. Miroshnichenko, Giant In-Particle Field Concentration and Fano Resonances at Light Scattering by High-Refractive Index Particles, Phys. Rev. A. **93**, 053837 (2016).

7. Michael I. Tribelsky, Jean-Michel Geffrin, Amelie Litman, Christelle Eyraud, and Fernando Moreno, *Small Dielectric Spheres with High Refractive Index as New Multi-functional Elements for Optical Devices*. Sci. Rep. **5**, 12288 (2015).
8. Michael I. Tribelsky, Phenomenological Approach to Light Scattering by Small Particles and Directional Fano's Resonances. Europhys. Lett. **104**, 34002 (2013).
9. Mohsen Rahmani, Andrey E. Miroshnichenko, Dang Yuan Lei, Boris Lukyanchuk, Michael I. Tribelsky, Arseniy I. Kuznetsov, Yuri S. Kivshar, Yan Francescato, Vincenzo Giannini, Minghui Hong, and Stefan A. Maier, *Beyond the Hybridization Effects in Plasmonic Nanoclusters: Diffraction-Induced Enhanced Absorption and Scattering*, Small **10**, 576–583 (2014).
10. B. S. Luk'yanchuk, A. E. Miroshnichenko, M. I. Tribelsky, Yu. S. Kivshar, and A.R. Khokhlov, *Paradoxes in Laser Heating of Plasmonic Nanoparticles*, New Journal of Physics **14**, 093022 (2012).
11. M. I. Tribelsky, A. E. Miroshnichenko, and Y. S. Kivshar, *Unconventional Fano resonances in light scattering by small particles*, Europhys. Lett. **97**, 44005 (2012).

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕРАГЕРЦОВОЯ ФОТОНИКА

Балакин А.В., Ожередов И.А., доц. *Шкуринов А.П.*

Терагерцовое (ТГц) излучение, которое принято определять как электромагнитное излучение диапазона частот от 300 ГГц до 10 ТГц (длин волн от 1 мм до 30 мкм) [1], относится к оптическому диапазону частот и занимает значительную часть электромагнитного спектра между инфракрасным и микроволновым диапазонами. В последние годы достигнут серьёзный прогресс в развитии техники генерации и регистрации ТГц излучения и на повестку дня серьёзно становятся вопросы практического применения новой техники.

К таким ключевым приложениям, которые формирую сейчас пакет «прорывных приложений» можно отнести высокоскоростные линии связи, высокоточные РЛС, способные работать в сложной электромагнитной обстановке, системы получения изображений с очень высоким разрешением, устройства дистанционной идентификации химических веществ и другие.

В нашей работе мы обсуждаем последние достижения в области генерации мощного ТГц излучения и его приложения для исследования нелинейно-оптических эффектов в конденсированных средах и наноструктурированных газовых струях.

Литература

1. Си-Чен Чжан, Джингджю Шю, Терагерцовая фотоника. Под редакцией С.В. Гарнова и А.П. Шкуринова, Москва, Ижевск, 334 стр., 2016.

Подсекция:

РАДИОФИЗИКА, ФИЗИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОНИКА И АКУСТИКА

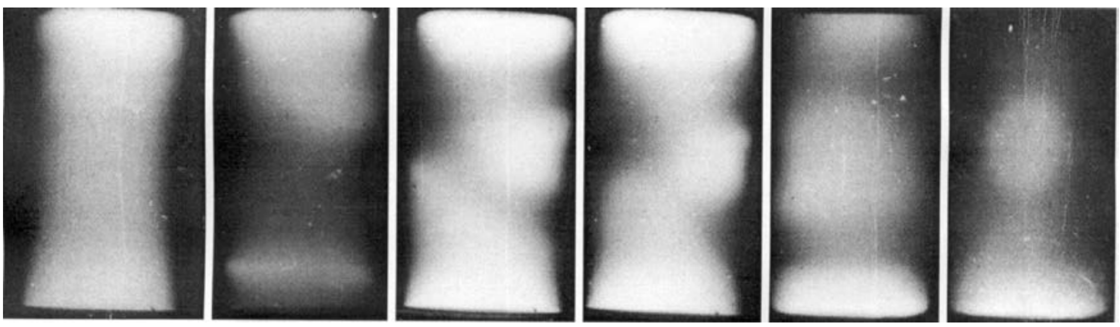
Сопредседатели
профессор А. Ф. Александров, доцент А. Ф. Королев,
профессор А. И. Коробов

ИОНИЗАЦИОННО-ПОЛЕВЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ И СВЕРХВЫСОКОЧАСТОТНЫХ РАЗРЯДАХ

Доц. *Двинин С.А.*

В работе рассмотрена задача об ионизационно-полевой неустойчивости в пространственно ограниченных высокочастотных (ВЧ) и сверхвысокочастотных (СВЧ) газовых разрядах с высокой плотностью электронов. Несмотря на то, что экспериментально формирование пространственных структур, связанных с этим типом неустойчивости, обнаружено достаточно давно [1, 2]; а при изучении их формирования в разрядах постоянного тока [3] и в плазме полупроводников [4] получен целый ряд интересных результатов, теоретическое описание развития и стабилизации неустойчивости в ВЧ и СВЧ плазме до недавнего времени отсутствовало. В статье [5] для расчета электромагнитного поля использовалось условие непрерывности полного тока, которое не позволяет оценить роль в развитии неустойчивости собственных волн плазмы, а в [6] поле, связанное с непрерывностью полного тока, не было выделено в явном виде, что затрудняло предельный переход к описанию нерезонансной моды неустойчивости.

В данной работе впервые решена задача о вынужденном возбуждении ионизационно-полевой неустойчивости внешним источником. Получены выражения для коэффициента усиления возбуждаемых возмущений в неограниченном и ограниченном по длине плазменных столбах. Теоретически найдены условия наблюдения абсолютной неустойчивости и реализации периодического (неустойчивость Винера Хопфа) и апериодического режимов ее развития. Рассмотрены случаи, когда неустойчивость имеет резонансный (связанный с возбуждением собственных волн плазменного столба, например, поверхностных волн) характер, и когда ее развитие обусловлено особенностями кинетики электронов.



А) Б) В) Г) Д) Е)

Рис. 1. Пример структур, реализуемых в плазме при развитии неустойчивости в разряде в волноводе 72×34 мм^2. Давление ксенона 0.1 Тор, СВЧ мощность, подводимая к плазме – А) – 140 Вт, Б) – 9 Вт, В) – 17 Вт, Г) – 9 Вт, Д) – 6.5 Вт, Е) – 5.5 Вт; радиус трубки – 1 см, частота СВЧ волны 3.2 ГГц.

Расчеты показали, что кроме нарушения однородности плазмы (рис. 1), развитие неустойчивости приводит к частичной передаче энергии от плоской волны поверхностной волне. Суммарное электрическое поле в разряде превышает поле падающей волны, обеспечивая выполнение условий интегрального баланса числа частиц, а в зависимости параметров плазмы от мощности СВЧ волны наблюдается гистерезис [7, 8]. Этот эффект обусловливает также увеличение поглощения поля поддерживающей плазму волны и, таким образом, существенное уменьшение мощности, необходимой для поддержания разряда (рис. 2).

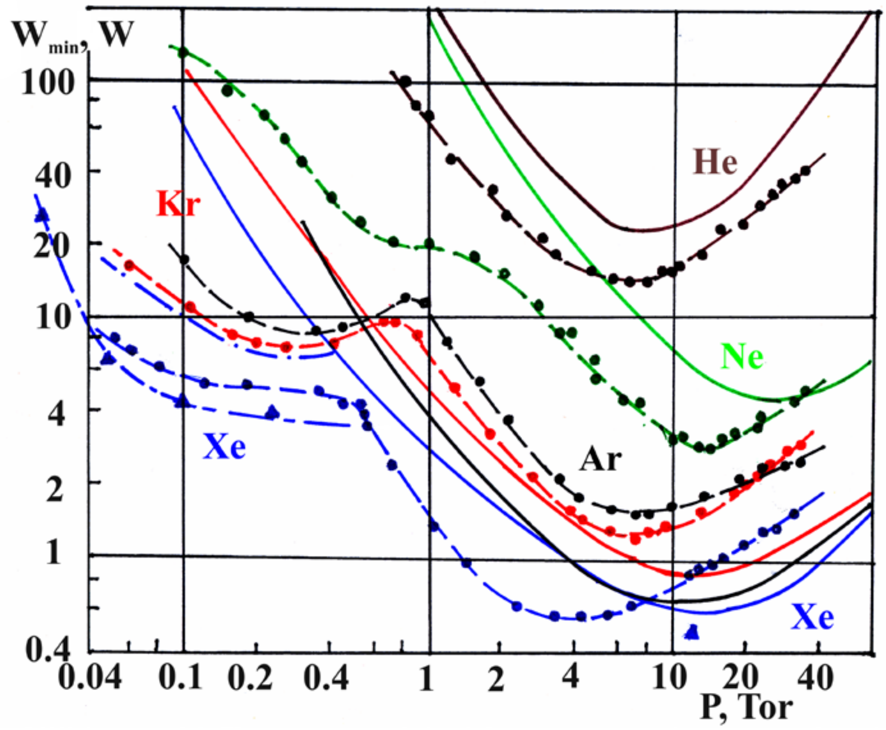


Рис. 2. Зависимость минимальной мощности поддержания разряда W_{min} от давления газа в гелии, неоне, аргоне, криптоне и ксеноне для СВЧ разряда в волноводе. Точки — эксперимент в трубке радиусом 0.6 см, сплошные кривые — расчет в модели однородного столба (В.А. Довженко), штрих пунктирная кривая — расчет с учетом ионизационной неустойчивости [7], треугольники — эксперимент [8]

Для ограниченной плазмы решена задача о стабилизации неустойчивости и показано, что вне зависимости от того, будет ли на начальном этапе развития неустойчивость периодической или апериодической, в результате ее развития может устанавливаться стационарное состояние с неоднородным распределением плотности электронов в пространстве и отсутствием колебаний во времени.

Показано, что резонансные ионизационно полевые неустойчивости могут наблюдаться в плазме низкого давления во всех случаях, когда в плазме при данных условиях могут существовать хотя бы два типа электромагнитных волн, поддерживающих разряд, например, падающая извне плоская волна и поверхностная волна. Поэтому возможно появление неустойчивости в ВЧ разрядах в технологических установках, содержащих плазму большого размера, связанное с взаимодействием четной и нечетной поверхностных волн, распространяющихся вдоль граница плазмы с металлом [9].

Проведенные расчеты согласуются с экспериментами по измерению характеристик плазмы и структуры электромагнитного поля, проведенными в разряде в СВЧ разряде в волноводе. Полученные результаты важны при объяснении характеристик ВЧ и СВЧ разрядов низкого давления, в том числе в магнитном поле, и для разработки технологических установок, содержащих плазму большого размера, поддерживаемую высокочастотным полем.

Литература

1. Джерпетов Х.А., Зайцев А.А. // Доклады АН СССР, 1953, 89, №5, с. 825–828.
2. Зайцев А.А., Джерпетов Х.А. // Журн. эксперим. и теорет. физики, 1953, 24, с. 516–528.
3. Ланда П.С. Автоколебания в распределенных системах М.: URSS/Книжный дом «Либроком», 2010, с. 183–209.
4. Кернер Б.С., Осипов В.В. Автосолитоны. М.: Наука. 1991. 198 с.
5. Двинин С.А., Довженко В.А., Солнцев Г.С. // Физика плазмы, 1982, 8, с. 1228–1235.
6. Mackey D., Plantie L., Turner M.M. // Applied Mathematical Letters, 2005, 18, p. 865–873.
7. Двинин С.А., Довженко В.А., Солнцев Г.С. // Физика плазмы, 1983, 9, с. 1058–1067.
8. Двинин С.А., Постников С.А., Солнцев Г.С., Цветкова Л.И. // Физика плазмы, 1983, 9, с. 1297–1302.
9. Двинин С.А., Вологиров А.Г., Михеев В.В., Свиридкина В.С. // Физика плазмы, 2008, 34, с. 746–755.

НАУЧНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ В ИНТЕРНЕТЕ: ПРОБЛЕМА ПОИСКА НА ПРИМЕРЕ АКУСТИКИ

Ст. н. с. Шамаев В.Г. н. с. Горшков А.Б., доц. Гущина Л.Г.
ст. преп. Якименко В.И.

Каждый научный сотрудник постоянно сталкивается с недостатком информации. Простейший случай — это когда он готовится к переизбранию в должности. Надо заполнить список своих работ. Почти у каждого, кто не ведет их систематический список, случаются потери. В составлении списка в МГУ им. М.В. Ломоносова помогает "Истина" (Интеллектуальная Система Тематического Исследования НАукометрических данных), "предназначенная для учета и анализа научной деятельности сотрудников". Она как раз и дает возможность вести систематический учет своей учебно-научной деятельности, т.к. формализована, и ежегодные отчеты по работе сотрудника, сведения к его переизбранию или назначению доплат, премий и т.д. снимаются с неё.

Гораздо важнее познакомиться, прочитать, получить сведения о работах других людей в интересующей нас области. Раньше для этого ходили в библиотеку и просматривали подшивки журналов, а также ежемесячный выпуск "Физика" Реферативного журнала ВИНИТИ. Помогали этому и обзоры. Вспоминаются прекрасные обзоры в "Итогах науки и техники" ВИНИТИ. С 1962 и по 1992 гг. их было выпущено огромное количество — 2648. По физике и астрономии — 182 [1]. По сути, в 1992 г. и закончилось то информационное обеспечение, которое было в СССР. Прекратились выпуски "Итогов", "Экспресс информации", еще раньше "Сигнальной информации", в 2–3 раза сократилось наполнение Реферативного журнала, а его тираж сократился к 2016 г. до нескольких экземпляров [2]. Совсем исчезли многие из его выпусков. Годовой выпуск РЖ "Физика" в 2017 г. стоит 275 565 рублей.

Для получения информации остались только Интернет да посещение конференций. Для англоязычной науки есть Web of Sciences, Scopus, SciFinder и много другого. Но что есть в Интернете по русскоязычной науке и что бы мы хотели там видеть? Есть сайты отдельных групп журналов, объединенных единым издательством, и сайты отдельных журналов. Кроме того, для русскоязычных журналов есть Научная электронная библиотека, Математический портал и Банк данных ВИНИТИ. О последнем мы много писали, и в очередной раз, не касаясь наполнения, лишь отметим, что в открытом доступе его фактически нет.

Научная электронная библиотека — http://elibrary.ru — впечатляет своим размахом и неплохим интерфейсом в плане показа информации по конкретному журналу. На наш взгляд, следовало бы выводить библиографическую информацию вместе с резюме, чтобы лишний раз не "кликать". Зато радует, что на этой же странице находится список всех доступных номеров данного журнала, упорядоченный по годам. Огорчает отсутствие свободного доступа к полным текстам свежих журналов. Почему-то с некоторых пор перестали давать вместе с резюме и литературу, приводимую в статье. Да, ещё одним недостатком в целом очень полезной информационной системы является перегруженный интерфейс поиска. Такое впечатление, что авторы системы попытались в форму поиска занести всё, что они знали или некстати вспомнили. Впрочем, западные информационно-поисковые системы тоже имеют свою далеко не всегда удобную "специфику" в плане поиска и подачи материала.

А вот то, что мы бы порекомендовали в качестве образца — Математический портал — http://www.mathnet.ru. К нашему сожалению, он, что следует из названия, посвящен математике, лишь с небольшим вкраплением физических журналов. Зато портал прекрасно организован, имеет продуманную структуру и удобный интерфейс, обладает неплохими поисковыми возможностями. Тут же можно прочитать тексты большинства статей.

Стоит от всего сердца поблагодарить сотрудников Математического института им. В.А. Стеклова за такую работу.

В Сети сейчас можно найти много электронных версий печатных журналов. Вы даже не представляете, как их много, если не занимались методичным поиском. Так, только по акустической тематике мы обрабатываем более пяти сотен русскоязычных сайтов. Это и сайты научных и образовательных учреждений, и сайты издательств, и просто сайты тех или иных журналов. Например, портал издательства "Радиотехника" — http://www.radiotec.ru — объединяет 18 журналов, портал издательства Сибирского отделения РАН — http://sibran.ru/journals с 22 журналами, портал журналов Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе РАН — **http://journals.ioffe.ru**, сайт журнала "Успехи физических наук" — http://ufn.ru, сайт "Журнала экспериментальной и теоретической физики" — http://www.jetp.ac.ru/cgi-bin/r/index и многие другие.

Не все электронные версии журналов достаточно удобны для пользования, не у всех есть хотя бы простейший поиск, многие запрятаны в недрах сайтов своих учреждений, не все дают полные тексты статей, но есть содержание, есть резюме, некоторые при этом дают список литературы, ключевые слова, и этого, в общем-то, достаточно, чтобы понять, нужна ли вам конкретная статья. Общая претензия почти ко всем, а лучше сказать пожелание, чтобы электронная версия не просто повторяла печатную, а имела бы и свои преимущества, как, например, журналы издательства Шпрингера. Например, они приводят в пристатейных ссылках в свою очередь отсылки на поисковые системы, где данная статья отождествлена.

Журнал "Успехи физических наук" поместил на сайте не только полные тексты всех номеров журнала, но снабдил его авторским указателем и указателем по рубрикатору. Так что пользователь легко может просмотреть все статьи номера по нужной ему тематике, посмотреть все статьи конкретного автора и т.д. Выходящий с большой регулярностью УФН не пытается закрыть доступ к свежим статьям, а наоборот, сразу их выкладывает в публичный доступ.

Чего же не хватает интернет-пользователю? На наш взгляд, не хватает двух компонентов: возможности просмотра сразу всех текущих журналов и поисковой системы по всем этим ресурсам. Первый компонент ранее существовал в печатной форме — это Реферативный журнал ВИНИТИ с его почти тремястами выпусками по всем отраслям науки, техники и даже экономики и информатики. Второй тот же ВИНИТИ пытался сделать в виде сначала магнитолenточной службы, а затем Банка данных. Сейчас нет первого, и не возникло второго.

В то время как уже с 1960-х гг. за рубежом тогда на ЭВМ существовали банки информационных данных, у нас подобного не существовало. Необходимость в описанном двухкомпонентном информационном обеспечении и подтверждается западным опытом, где выходили печатные выпуски

Chemical Abstracts, Current Contents. Они в настоящее время превратились — первый в поисковую систему SciFinder, а второй в Current Contents Connect — базу данных службы еженедельного оповещения о новых выпусках журналов и книг. Существовали и другие информационные печатные издания, например, толстые белые тома Astronomy and Astrophysics Abstracts, замененные сейчас информационно-поисковой системой ADS (NASA).

Собственно, такое современное полноценное информационное обеспечение по акустике мы и хотим представить. Выполнено оно на портале "Информационная система "Акустика". Русскоязычные источники" (ИПС) и состоит из полнотекстового архива "Акустического журнала", Сигнальной информации "Акустика" и Информационно-поисковой системы "Акустика". Все продукты портала связаны одним дизайном. Исходя из своего опыта работы с различными информационными ресурсами, мы остановились на интерфейсе с необходимыми в повседневной работе инструментами. Это, на наш взгляд, и требуется пользователям. Всё, что надо — перед глазами, а не на разных страницах интерфейса, и можно сразу начинать поиск — в случае ИПС или получить выдачу конкретной информации в разделах "Акустического журнала" и "Сигнальной информации".

На начальной странице, которой открывается портал (http://akdata.ru), пользователь оказывается в Информационно-поисковой системе "Акустика". Для поиска достаточно восьми полей. Можно было и 7, но в некоторых изданиях, как, например, "Доклады Академии наук", тома меняются в течение года. В указанном издании — шесть раз.

Пользователь может ввести название источника, при этом уже при трех введенных символах появляется подсказка, которая при каждом следующем символе уточняется. Если пользователь видит в списке требуемое издание, то достаточно кликнуть по нему, и поле сразу заполнится, если нет, то следует продолжить набор. Далее можно ввести год (или диапазон лет), по которому будет происходить поиск, том и номер выпуска, если информация ищется в периодическом издании. Следующее поле "авторы", затем "ключевые слова" и "рубрика". Можно заполнить все поля ИПС или любое их количество. Система укажет полное количество найденных документов и выдаст требуемую информацию, но в количестве не более 100 документов. Далее предлагается уточнить параметры поиска. Легче всего это сделать, указав годы или добавив имена авторов в соответствующие поля. Можно также указать рубрику, а если потребуется точнее, то и подрубрику.

Кстати, если указать только автора, то для подавляющего числа авторов этого достаточно. Авторы, имеющие в системе более 100 статей, составляют 0.07% или количественно — 18 человек на начало 2017 г.

Поиск по ключевым словам. По нашему мнению, такой поиск полезен, если он идет по всему тексту статьи или, по крайней мере, по заголовку и резюме, что и реализовано в нашей ИПС. Поиск только по заголовкам или только по так называемым "ключевым словам", которые зачастую сопровождают статью, малопродуктивен.

Поиск по рубрикатору. Наша информационная система позволяет также провести поиск по используемому в ней рубрикатору. Сам рубрикатор, как и "источник", тоже появляется в виде подсказки при нажатии на окно ввода. Рубрикатор по акустике имеет 16 рубрик, большинство из которых делится на подрубрики. Поиск по рубрикатору, на наш взгляд, является чрезвычайно важным, т.к. при этом пользователь сразу может окинуть взглядом большинство работ по теме в их историческом развитии (от новейших к более ранним). При желании он также имеет возможность перейти по гиперссылке на те рубрики, которые редактор считает нужным отметить как смежные, или получить все статьи каждого из авторов. Отметим, что рубрикатор имеет три уровня, если считать первым название тематической области "Акустика". Наш продолжительный опыт работы в ВИНИТИ говорит о том, что трех уровней, пожалуй, достаточно, т.к. погоня за их увеличением, что считалось ранее достижением в отделе физики ВИНИТИ, когда их число доходило до 6–8, приводила к совершенно неадекватной картине при наполнении рубрик. Как правило, это зависело от профессионализма, "вкуса" и ответственности редактора и в значительном количестве не соответствовало действительному положению дел в физике и затрудняло поиск нужных работ.

На странице выдачи присутствует полное библиографическое описание документа с резюме или рефератом.

Списки статей авторов или документов в рубриках формируются автоматически из документов базы данных портала. С наполнением БД их наполнение также меняется. На сегодняшний день в базе данных помещено около 45 тыс. документов за примерно 40-летний период, а по "Успехам физических наук", "Акустическому журналу" и некоторым другим в БД содержатся все статьи по акустической тематике за весь период их существования. Всего на конец 2016 г. в базу данных системы помещены более 40 тыс. авторов.

Портал "Акустика" в правом нижнем углу имеет точки доступа к полнотекстовой версии "Акустического журнала", структура сайта которого описана нами в "Акустическом журнале" [4], и к "Сигнальной информации" (СИ) [5]. Сайт архива "Акустического журнала" открывается всеми вышедшими на данный момент выпусками журнала, откуда возможен переход на содержание каждого выпуска с сопровождающими каждую статью резюме. Статьи прорубрицированы и кроме раздела содержания помещены еще и в соответствующую рубрику. Имеется авторский указатель.

Размещение архива журнала в Интернете и нахождение его там в течение вот уже пяти лет, как мы и предполагали, и, по отзывам пользователей, значительно упростило поиск статей журнала.

В статье [6] мы приводим трехмерный график, дающий наполнение рубрик по годам издания. Из него видно, как изменяется со временем наполнение рубрик (направлений). Такие данные можно использовать и как средство исторического анализа развития тех или иных исследований, и для их прогнозирования.

Сайт "Сигнальной информации" (http://akinfo.ru) нами реализован как информационная система по текущим публикациям по акустике. Информация на нем обновляется раз в два месяца. Полезность "Сигнальной информации" заключается в предоставлении возможности увидеть текущее состояние акустических исследований по различным направлениям. Сайт "Сигнальной информации" дает возможность поиска по источникам, авторам и рубрикатору, а также позволяет просмотреть весь текущий номер целиком, как было в Реферативном журнале, в pdf-формате. Нами оставлена возможность для пользователей просмотреть и все предыдущие выпуски. Почти одновременно с выходом очередного номера "Сигнальной информации", а с 2013 г. уже вышли 25 номеров, ее информация попадает в ИПС "Акустика". Еще один аргумент в пользу создания такого информационного интернет-ресурса, как "Сигнальная информация", связан с отсутствием сколько-нибудь полной информации о текущих научных исследованиях в русскоязычном мире.

Технология подготовки "Сигнальной информации" (СИ) используется для редактирования вводимой ретроспективной информации, т.к. наполнение ИПС "Акустика" идет в обе стороны по времени от 2013 г., начала выхода СИ. Именно такая процедура важна еще и потому, что разработанные и используемые рабочие места ввода в СИ документов и их редактирования снабжены фильтрами – формально-логическим контролем вводимой информации, что облегчает контроль за потоком данных, вводимым в БД. Ретроспективная часть в БД дополняется по мере нахождения в Интернете нужного материала.

Если пойти по пути Chemical Abstracts, который перевел в электронную форму все выпуски печатной версии с начала его выпуска в 1907 г., то можно рассмотреть возможность загрузки в нашу ИПС печатных выпусков РЖ ВИНИТИ "Акустика", тем более, что уже сейчас 40-летний массив акустической информации из печатных журналов в значительном объеме выполнен.

Собранная нами в одном месте текущая информация по свежим книгам, конференциям, журналам и т.д. позволяет не только получить свежий срез научных работ, а также тексты статей из "Акустического журнала", но и запустить информационно-поисковую систему на основе сформированной базы данных, непрерывно пополняемой текущими и ретроспективными документами. Пример использования ресурса — в работе [6].

Отметим также, что кроме простого предоставления информации портал "Акустика" позволяет проводить работы по изучению состояния акустики на текущий момент времени, снимать данные для последующего анализа тенденций в развитии той или иной области акустики, получать данные об области интересов того или иного специалиста, искать интересующие статьи и т.д. В качестве примера такого использования см. [7].

В заключение отметим, что важное значение имеют вопросы приоритета и сохранения интеллектуальной собственности. Многие из наших авторов обнаруживают свои, да и не только, старые результаты опубликованными их коллегами в зарубежных журналах по второму и третьему разу. В свою очередь, в текущих публикациях нередко встречаются повторы, свидетельствующие о недостаточном знакомстве авторов с работами своих предшественников. Только правильно организованное информационное обеспечение может гарантировать чистоту и новизну научных результатов, которые лежат в основе исследовательского процесса.

Созданные технологии подготовки информационных ресурсов и сами ресурсы, на наш взгляд, представляют собой законченную систему информационного обеспечения акустических исследований по русскоязычному сегменту. Они также позволяют обеспечить полное отражение русскоязычной научной литературы для мониторинга и объективной экспертной оценки научной деятельности российских ученых, что может способствовать укреплению положительного имиджа российской науки в мире.

Литература

1. Черный А.И. Всероссийский институт научной и технической информации: 50 лет служения науке. М.: ВИНИТИ. 2005. 306 с.
2. Шамаев В.Г. Об информационном обеспечении научных исследований // Вестник Российской академии наук. 2013. Т. 83. № 10. 910–914.
3. Банк данных ВИНИТИ http://bd.viniti.ru/index.php?option=com_content&task=view&id=236&xmf=s&Itemid=101 (проверено 11.03.2017).
4. Шамаев В.Г., Горшков А.Б., Жаров А.В. Архив "Акустического журнала" в Интернете (www.akzh.ru) // Акустический журнал. 2013. Т. 59. № 2. 283–288.
5. Шамаев В.Г., Горшков А.Б., Шамаев Н.В. Проект "Акустика. Сигнальная информация" (http://akinfo.ru/) // Акустический журнал. 2014. Т. 60. 109–114.
6. Шамаев В.Г., Горшков А.Н. Открытая система информационного обеспечения акустики // Акустический журнал. 2017. Т. 63. № 4.
7. Руденко О.В. «Нелинейный экран как элемент систем для звукопоглощения и преобразования частоты» // Акустический журнал. 2016. № 1. Т. 62. 38–43.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ СВЧ-ДИАГНОСТИКИ ИМПУЛЬСНОЙ ПЛАЗМЫ

К.И. Дешко, kir.deshko@gmail.com

Простота конструкции магнитоплазменного компрессора (МПК) [1, 2] и возможность получения высокоскоростных струй сильноионизованной плазмы обеспечивают таким плазматронам широкую область применений. При этом особенно актуальны экспериментальные исследования параметров плазмы в области взаимодействия плазменной струи с преградой (т.н. ударно-сжатый слой). Такие исследования часто [1, 2] выполняются спектроскопическими методами, и потому, как правило, не обеспечивают приемлемого (1 мкс) временного разрешения и динамического диапазона.

В настоящей работе предложен и опробован оригинальный метод СВЧ-диагностики, позволивший измерить в ударно-сжатом слое концентрацию электронов и частоту электронных столкновений в широких пределах и с достаточным временным разрешением.

На пути плазменной струи МПК размещался зонд, который служил одновременно и преградой, на которой тормозился плазменный поток, и средством диагностики. Зонд представлял собой небольшой отрезок круглого запредельного волновода, связанного с коаксиальной линией. В линию от генератора подавался СВЧ сигнал (8 ГГц, < 1 мВт) и измерялись мощность прошедшей через линию и отражённой волн. Налетающая плазма заполняла зонд, в результате изменялись мощности отражённого и прошедшего через коаксиальную линию сигналов.

Градуировочные характеристики зонда (рис. 1) были получены при помощи численного моделирования в программном пакете CST Studio Suite. При этом для фиксированных значений концентрации электронов и частоты столкновений ν рассчитывались мощность прошедшего через зонд и поглощённого СВЧ-сигнала.

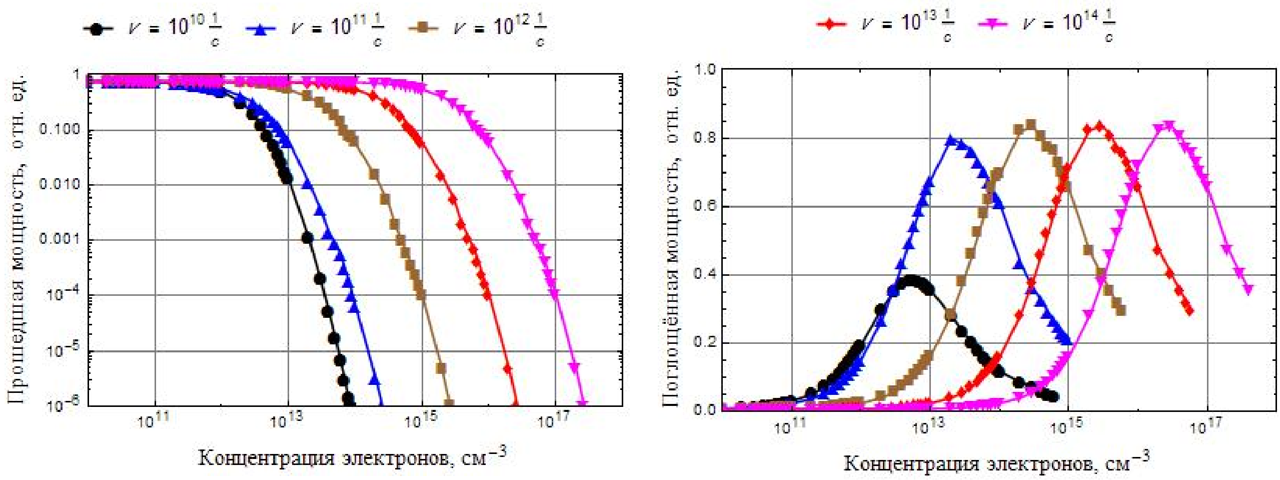


Рис. 1. Пример градуировочных характеристик зонда.

В эксперименте, наоборот, измерялись мощности прошедшего и отражённого сигнала (рис. 2) и по ним определялись концентрация электронов и частота столкновений. Пример полученных результатов представлен на рис. 3.

Предложенный метод диагностики, таким образом, позволил экспериментально определить электронную концентрацию и частоту столкновений в плазме ударно-сжатого слоя в широких пределах и с разрешением по времени менее 1 мкс.

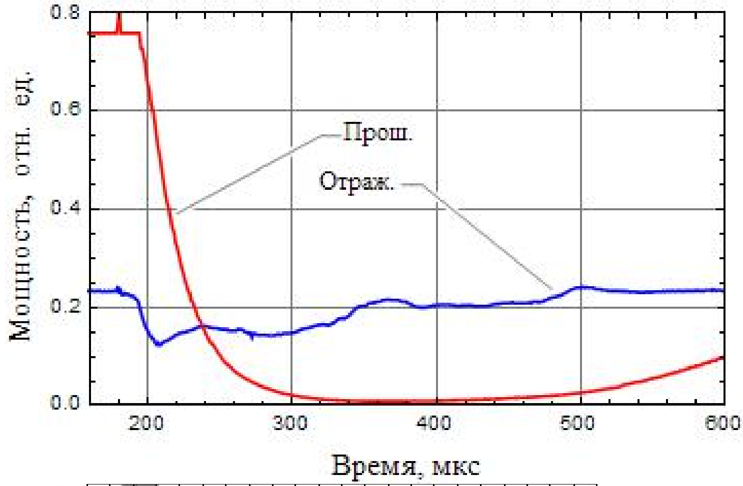


Рис. 2. Осциллограммы прошедшей и отражённой мощности.

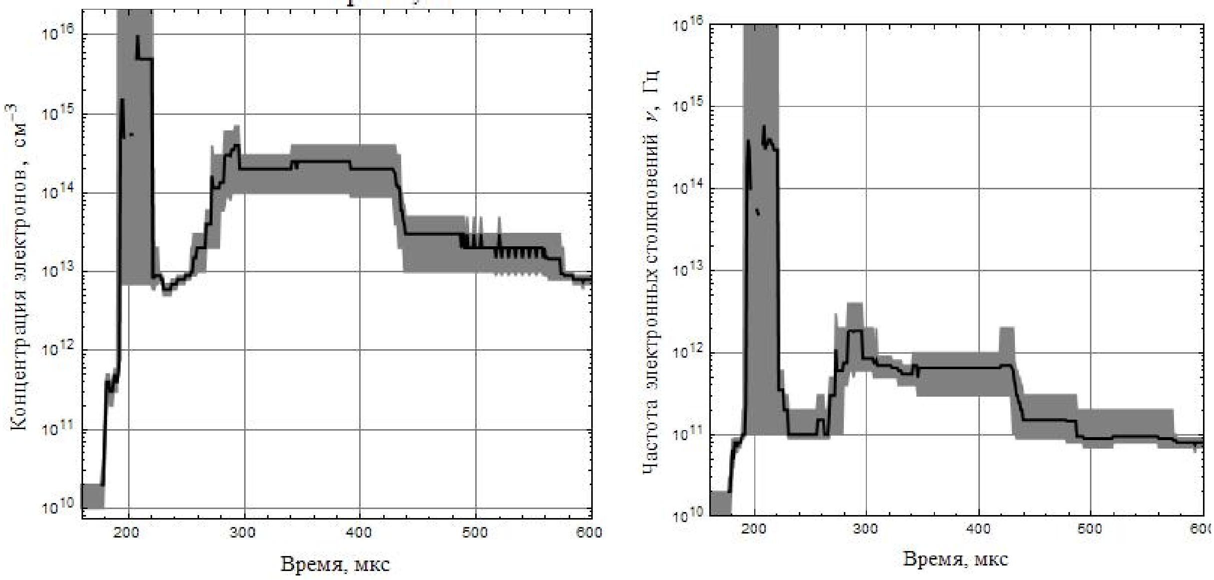


Рис. 3. Зависимости концентрации и частоты соударений электронов от времени. Заливкой показана погрешность.

Литература

1. *Асташинский В.М., Кузьмицкий А.М., Мищук А.А.* // Минск, Беларусь, Институт физики им. Б.И. Степанова, «Журнал прикладной спектроскопии», 2011, **78**, № 3, с. 404–409.
2. *Волколупов Ю.Я., Красноголовец М.А., Острижной М.А., Нестеренко В.Г. и др..//.* Харьков, Украина, «Журнал технической физики». 2001, **1**, вып. 8, с. 112–116.

НЕЛИНЕЙНЫЕ УПРУГИЕ ЯВЛЕНИЯ НА ПЛОСКОЙ ШЕРОХОВАТОЙ ГРАНИЦЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Проф. *Коробов А.И.*, н. с. *Ширгина Н.В.*, м. н. с. *Кокшайский А.И.*

Неидеальность структуры твердых тел приводит к появлению в них структурной неклассической упругой нелинейности. Неклассическая нелинейность может существенно превосходить классическую нелинейность, связанную с ангармонизмом межмолекулярных сил. Возможные физические механизмы структурной нелинейности рассмотрены в работе [1]. Одним из таких механизмов является граница двух плоских твердых тел [2]. Впервые нелинейные упругие свойства границы двух твердых сред были исследованы в работах [3]. Было обнаружено, что граница (контакт) двух плоских шероховатых сред является источником упругой нелинейности, которая значительно больше классической нелинейности в материале контактирующих сред. При распространении поверхностной волны вдоль границы двух сред, существуют как нормальная к поверхности составляющая (сдвиговая волна), так и продольная компонента. При распространении нормальной компоненты не происходит генерация четных гармоник [4], а в спектре продольной волны возможно появление второй гармоники. В настоящей работе представлены результаты исследований нелинейных упругих свойств границы шероховатых сред с различными размерами шероховатостей при распространении поверхностных акустических волн.

Экспериментальная установка состояла из компонентов, представленных на рис. 1. К стеклянной подложке с помощью домкрата прижимались образцы с различной степенью шероховатости их поверхности. Внешнее статическое давление реверсивно изменялось в интервале $0 < P < 4100$ кПа. Поверхностные акустические волны (ПАВ) возбуждались и принимались в подложке из оптически полированного стекла клиновыми ультразвуковыми преобразователями. Для возбуждения ПАВ в подложке использовался клиновый преобразователь с резонансной частотой 1.25 МГц, прошедшая через границу подложка-образец (ПО) ПАВ регистрировалась клиновым преобразователем с резонансной частотой 2.5 МГц. Этот преобразователь эффективно регистрировал ПАВ с частотами 1.25 МГц и 2.5 МГц. При измерении сигнала второй гармоники ПАВ на частоте 2.5 МГц применялся режекторный фильтр на частоту зондирующего сигнала. Измерения нелинейных упругих свойств границы ПО проводились спектральным методом по эффективности генерации второй гармоники ПАВ. В качестве образцов использовалась наждачная бумага с известными размерами гранул абразивного материала и образцы из дюралюминиями с нанесенными на них неровностями. В работе представлены результаты для 3 типов наждачных бумаг, которые имели различные размеры гранул абразивного материала: Р60, размеры гранул (250–300) мкм, Р400 (44–47) мкм, Р800 (20.8–

22.8) мкм. На поверхность образцов из дюралюминия в виде куба с шириной основания 28 мм были нанесены неровности при помощи наждачной бумаги типа P60, P320 и P800 с различными диаметрами гранул абразивного материала.

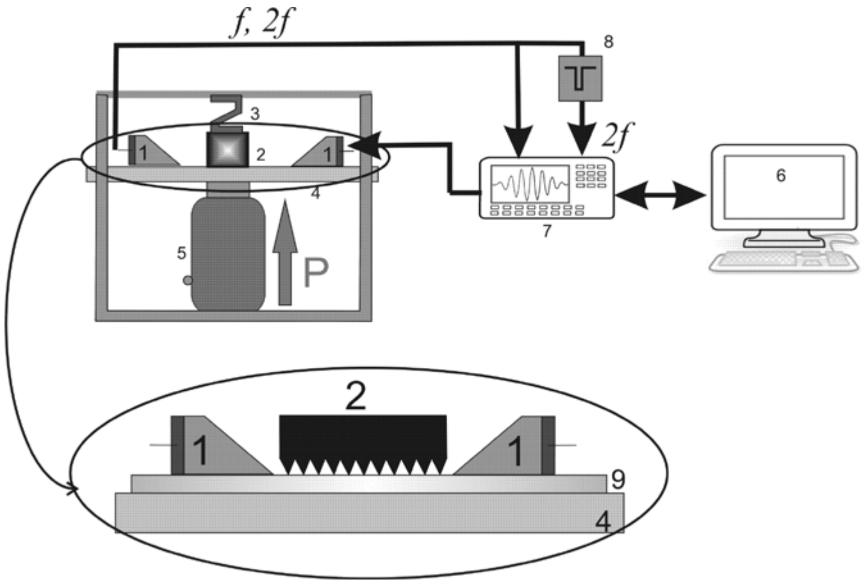


Рис. 1. а) Экспериментальная установка для исследования распространения поверхностных волн. 1 — клиновые преобразователи для возбуждения и приема поверхностных волн, 2 — образец, 3 — датчик давления, 4 — пластина из дюралюминия, 5 — домкрат, 6 — компьютер со встроенным АЦП, 7 — генератор и усилитель, 8 — режекторный фильтр, 9 — подложка из полированного оптического стекла.

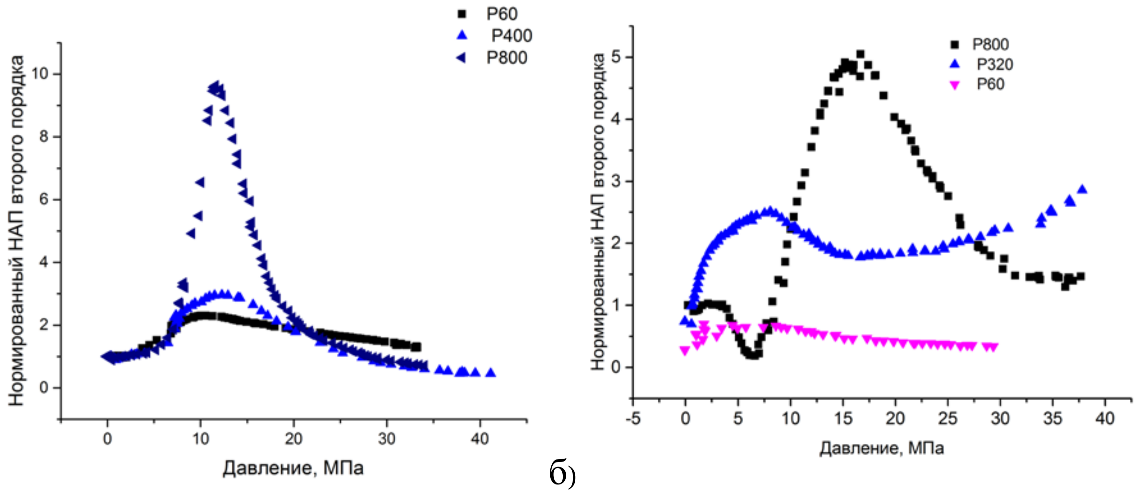
В спектре акустической волны, прошедшей вдоль поверхности образца, наблюдалась первая гармоника на частоте 1,25 МГц и вторая (2,5 МГц) гармоника:

$$A = A_f \sin(2\pi ft - kl) + A_{2f} \sin\left[2(2\pi ft - kl)\right] \tag{1}$$

Зависимость амплитуды второй гармоники A2f от амплитуды основной волны Af в твердых телах определяется выражением:

$$A_{2f} = \frac{Nk_f^2 L}{8} A_f^M \quad (2),$$

где N — нелинейный акустический параметр второго порядка (НАП), kf — волновой вектор основной волны, L — длина образца [1]. При фиксированном значении амплитуды зондирующей волны для всех образцов, была экспериментально измерена зависимость амплитуд первой и второй гармоник ПАВ от давления на границе. Эти измерения с учетом уравнения (2) позволили рассчитать зависимость нелинейных акустических параметров (НАП) второго порядка от величины приложенного к границе ПО давления, нормированные значения которых приведены на рис. 2 (а, б). (НАП для каждого образца были пронормированы на их значения при минимальном давлении, использовавшемся в эксперименте).



а) б)

Рис. 2. Нормированный нелинейный акустический параметр в образцах с различной степенью шероховатости а) образцы из наждачной бумаги, б) дюралюминиевые образцы.

С увеличением давления на образец растёт число микроконтактов, являющихся источниками упругой нелинейности между поверхностями, и как следствие, увеличивается упругая нелинейность на границе ПО. При дальнейшем увеличении давления, когда все имеющиеся контакты вступили во взаимодействие, согласно теории контактного взаимодействия Герца, упругая нелинейность на границе ПО уменьшается. При большем размере гранул на одинаковых площадях образца количество источников нелинейности уменьшается, в то же время размеры гранул в таких образцах находятся в более широком диапазоне, что приводит к увеличению интервала давлений, в котором происходит изменение НАП. Предложенная в работе экспериментальная методика исследования нелинейных упругих свойств границы гладкой подложки и плоских образцов с различной степенью шероховатости с помощью ПАВ может быть использована в неразрушающем контроле для диагностики шероховатости и волнистости поверхности плоских твердых тел.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-22-00042).

Литература

1. Руденко О.В. Гигантские нелинейности структурно-неоднородных сред и основы методов нелинейной акустической диагностики // Успехи физ. наук. 2006. Т. 176, № 1. С. 77–95.
2. Solodov I.Y., Krohn N., Busse G. CAN: An example of non-classical acoustic nonlinearity in solids // Ultrasonics. 2002. Vol. 40. P. 627–631.

3. Richardson J.M. Harmonic generation at an unbonded interface—I. Planar interface between semi-infinite elastic media // Int. J. Eng. Sci. 1979. Vol. 17. P. 73–85.
4. Meziane A., Norris A.N., Shuvalov A.L. Nonlinear shear wave interaction at a frictional interface: Energy dissipation and generation of harmonics // J. Acoust. Soc. Am. 2011. Vol. 130, № 4. P. 1820–1828.

Подсекция:

ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

Сопредседатели
чл.-корр. Д. Р. Хохлов,
профессор В. А. Кульбачинский, профессор О. В. Снигирев

ЭЛЕКТРИЧЕСКИ МАЛЫЕ АНТЕННЫ НА ОСНОВЕ МНОГОЭЛЕМЕНТНЫХ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ СТРУКТУР

Н. с. *Колотинский Н.В.* проф., *Корнев В.К.,*
постдокторант *Шарафиев А.В.,* с. н. с. *Соловьев И.И.*
рук. технологич. отд., д-р. *Муханов О.А.*

Антенна является ключевым элементом всех приемных и передающих систем, осуществляющих беспроводную связь и вещание. Дальность коммуникационной связи и ее качественные характеристики в значительной степени определяется антенной. Среди всех типов используемых антенн значительную часть составляют электрически малые антенны (ЭМА). ЭМА называется антенна с такими размерами, которые позволяют разместить ее в сфере, диаметр которой мал по сравнению с длиной волны λ на рабочей частоте. Под малым диаметром понимается диаметр меньший, чем $\lambda/2\pi$ [1, 2]. Можно показать [2, 3], что высокая добротность Q ЭМА обусловливает узкую частотную полосу антенны $BW \sim 1/Q$. В работе [4] сформулирован фундаментальный теоретический предел $Q_{\min} = 1/(2\pi a/\lambda)^3$ для минимальной величины добротности $Q_{\min}$ бездиссипативной антенны, которая может быть помещена внутрь сферы с минимальным радиусом *a*.

Все способы существенного улучшения характеристик электрически малой антенны и ее согласования с нагрузкой основаны на использовании в антенной конструкции активных элементов. Так, расширение частотной полосы антенны может быть достигнуто при использовании так называемых “non-Foster” цепей активного типа [5]. Подключение усилителя с очень большим входным сопротивлением непосредственно к антенне, настроенной в резонанс подключением к ней соответствующего реактивного элемента, позволяет получить большой выходной сигнал, однако при этом частотная полоса остается по-прежнему узкой.

Построение широкополосной антенной системы возможно при подключении к ЭМА усилителя через чисто реактивное входное сопротивление, имеющее такой же знак и такую же частотную зависимость, как и реактивная составляющая импеданса ЭМА. Такой усилитель может быть реализован на основе сквида или цепочки последовательно включенных сквидов [6, 7]. Электрически малую антенну, интегрированную с усилителем, часто называют активной ЭМА. Однако, линейность и динамический диапазон таких активных антенн остаются низкими: их значения находятся на уровне низкой линейности отклика сквида и ограниченного динамического диапазона сквида или последовательной цепочки сквидов.

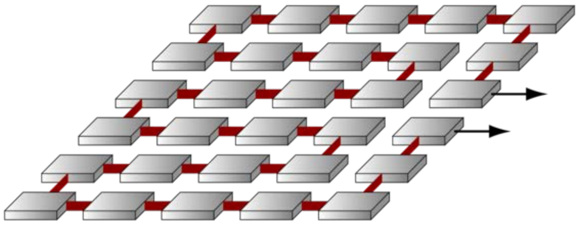


Рис. 1. Схема сверхпроводниковой квантовой решетки (СКР).

Широкополосные антенны активного типа с большим динамическим диапазоном линейного преобразования принимаемого сигнала в выходное напряжение могут быть реализованы на основе специально разработанных многоэлементных джозефсоновских структур. Такие джозефсоновские структуры получили название сверхпроводящие квантовые решетки (СКР).

Сверхпроводящие квантовые решетки [8–10] представляют собой равномерную периодическую структуру, состоящую из одинаковых сверхпроводящих квантовых ячеек, обеспечивающих высоколинейное преобразование входного магнитного сигнала в выходное напряжение. Такие ячейки могут быть соединены последовательно или последовательно-параллельно, формируя одно-, двух- и трехмерные структуры (рис. 1). Высокая линейность характеристик активных устройств на основе квантовых решеток обеспечивается высокой линейностью функций преобразования магнитного сигнала в напряжения квантовых ячеек, а динамический диапазон решетки растет с ростом числа N квантовых ячеек в решетке как $\sqrt{N}$ [10].

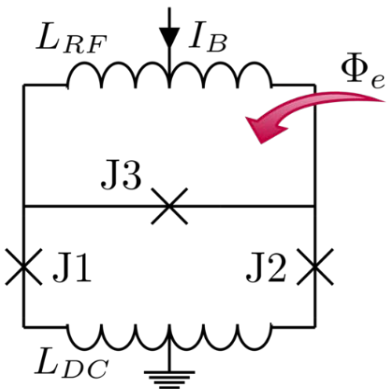
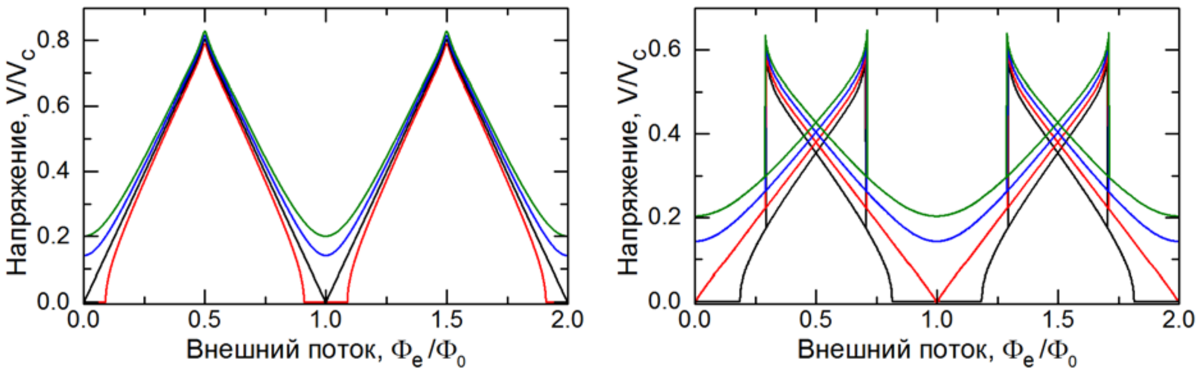


Рис. 2. Эквивалентная схема би-сквида. J1, J2, J3 — джозефсоновские переходы, L_{RF}, L_{DC} — индуктивности верхнего и нижнего кольца би-сквида, I_b — ток смещения (питания) би-сквида, Φ_e — внешний сигнал в виде магнитного потока.

В качестве базовых квантовых ячеек, обеспечивающих высокую линейность функции преобразования магнитного сигнала в напряжения, были предложены два типа элементарных ячеек: би-сквиды [11-16] и дифференциальные квантовые ячейки [8-10, 17-19], которые продемонстрировали лучшие, по сравнению с би-сквидами, характеристики для использования в качестве элементов СКР.

Би-сквид может быть представляет собой модифицированный двухконтактный сквид, содержащий дополнительный джозефсоновский переход, как показано на рисунке 2. На рисунках 3а и 3б представлены отклики напряжения такой ячейки при двух режимах работы: безгистерезисном (l*<1) и гистереизном (l*>1) [14-16]. Параметр би-сквида l* может быть определен как $l^* = l{\cdot}i_{C3}$, где $l = L_{RF}/L_C$ — нормированная индуктивность верхнего контура, $i_{C3} = I_{C3} / I_C$ — нормированный критический ток третьего перехода, $L_C = \Phi_0/(2\pi I_C)$, I_C — критический ток первого и второго джозфсоновских переходов, которые полагаются одинаковым, индуктивность нижнего контура полагается равной нулю. Острый нижний угол отклика достигается при токе смещения (питания) би-сквида равным $I_B = 2I_C$.



а *б*

Рис. 3. Отклики напряжения би-сквида на внешний магнитный сигнал при различных значениях тока смещения $i_b = I_b/I_c$ и оптимальной величине i_{c3} для *(а)* безгистерезисного ($l = 1$, $i_{c3} = 1$) и *(б)* гистерезисного ($l = 4$, $i_{c3} = 0{,}85$) режимов. Кривые соответствуют токам питания: i_b = 1,98 (нижняя кривая); 2; 2,02; 2,04.

Линейность устройства может быть определена как: $\mathrm{Lin} = 20\log[b_1/\max\{b_k\}]$, где b_1 и b_k — первая и последующие гармоники выходного сигнала при условие, что на вход подается гармонический сигнал [20]. На рисунке 4 представлена серия зависимостей линейности би-сквида от величины параметра l^* для различных величин l [14]. Линейность би-сквида может достигать величин 90–100 дБ, но при этом точность изготовления би-сквида~~,~~ должна обеспечивать отклонение критического тока от заданного не более 5 % для сохранения линейности в 90 дБ и не более 10 % для сохранения линейности в 80 дБ [16].

Дифференциальная квантовая ячейка состоит из двух плеч, представляющих собой параллельные цепочки из n джозефсоновских переходов в резистивном состоянии. Отклики этих плеч на внеш-

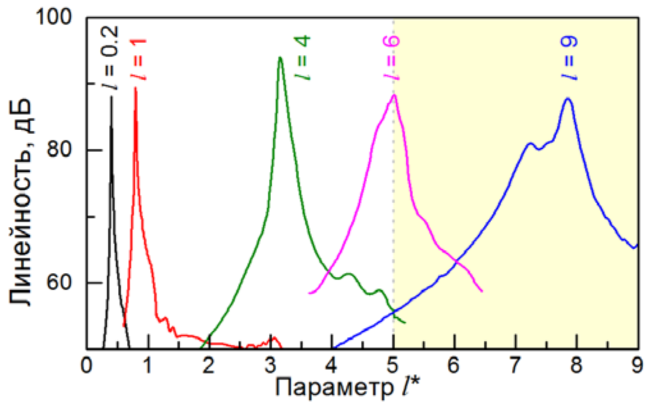
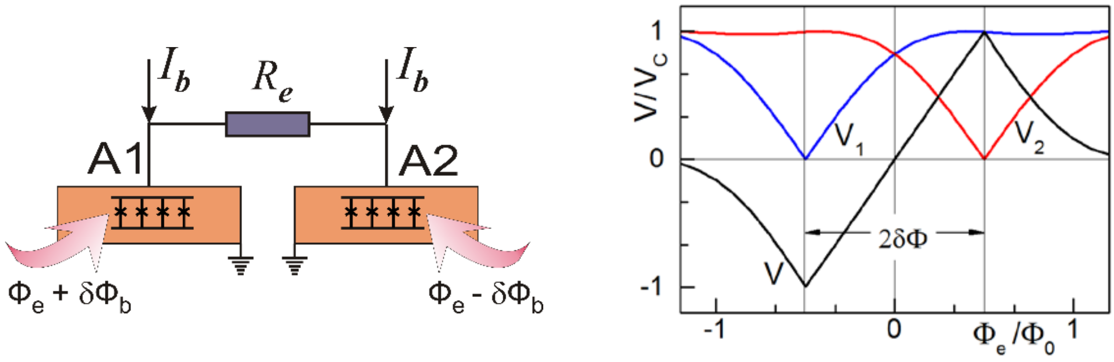


Рис. 4. Зависимость достижимой линейности би-сквида от параметра $l^* = l{\cdot}i_{C3}$ для различных значений индуктивности верхнего кольца l. Из работы [14].

ний магнитный поток должны быть смещены друг относительно друга некоторым магнитным потоком δΦ и при дифференциальном включении вычитаются друг из друга (рис. 5а). В результате отклик такой структуры, изображенный на рисунке 5б, оказывается близким к линейному [10, 20]. СКР, состоящая из таких ячеек, представляет собой две дифференциально включенные цепочки левых и правых плеч ячеек.



а *б*

Рис 5. *(а)* Схема дифференциальной квантовой ячейки, состоящей из двух параллельных цепочек джозефсоновских переходов A1 и A2, R_e — внешняя нагрузка, I_b — ток смещения, δΦ — смещение по магнитному потоку, Φ_e — внешний магнитный поток. (б) Отклик напряжения V_1 и V_2 плеч дифференциальной квантовой ячейки на внешний магнитный поток и результирующий отклик $V=V_1 - V_2$.

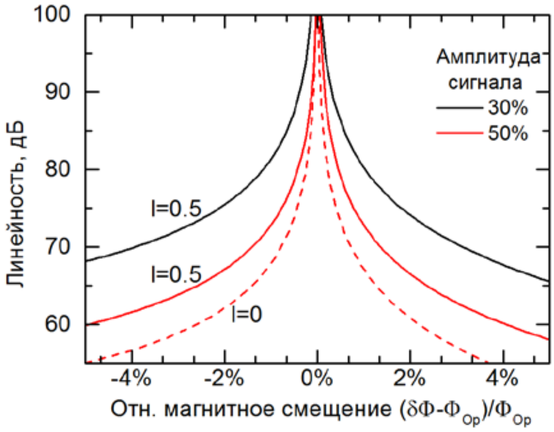


Рис. 6. Зависимость линейности отклика дифференциальной квантовой ячейки из *n = 20* переходов от относительного магнитного смещения для случая конечной индуктивности l_a = 0:5 (сплошные линии) и нулевой индуктивности (пунктирная линия) при оптимальных токах смещения i_b. Φ_{op} — оптимальная величина магнитного смещения.

В случае, если количество джозефсоновских переходов в плече ячейки больше 10, может достигаться линейность до 100 дБ при оптимальном выборе магнитного смещения δΦ и тока смещения цепочки. В отличие от би-сквидов данные параметры могут быть уточнены в процессе эксплуатации в соответствии с реальными параметрами изготовленных устройств [10, 21]. На рисунке 6 приведены зависимости линейности от величины смещения по магнитному потоку для индуктивностей связи между соседними переходами l_a *=0* и *0,5*.

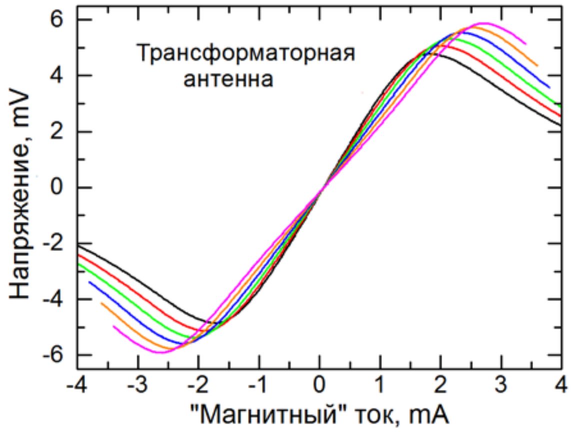
При использовании активных ЭМА на основе СКР необходимо использовать интерфейсы, обеспечивающие оптимальное сопряжение с другими устройствами, как рассматривается в статьях [17, 21], а также учитывать влияние возможных «размерных эффектов» для сохранения высоколинейности характеристик антенны [22, 23].

Электрически малую антенну на основе СКР можно реализовать двумя различными типами — трансформаторным и бестрансформаторным [9, 24, 25]. В трансформаторной ЭМА используется один или несколько сверхпроводящих трансформаторов магнитного потока, индуктивно связанных с квантовыми ячейками СКР. В то же время, СКР с несверхпроводящими цепями соединения сверхпроводящих квантовых ячеек может быть использована непосредственно как активная ЭМА бестрансформаторного типа [9]. Отсутствие трансформаторов потока существенно упрощает конструкцию ЭМА, а также позволяет полностью исключить паразитную индуктивную связь между квантовыми ячейками.

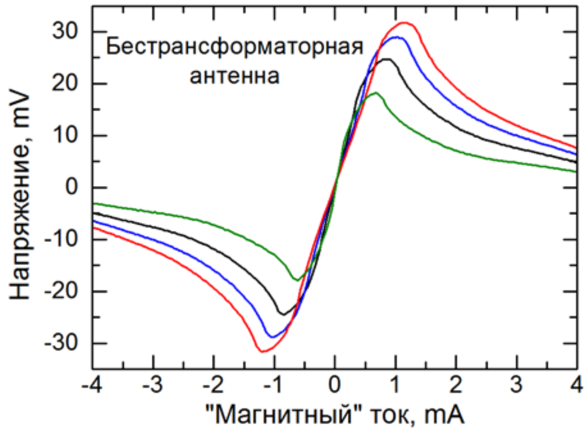
Общая эффективность ЭМА трансформаторного типа зависит от площади трансформатора, коэффициента трансформации потока в квантовые ячейки и числа таких ячеек, которые могут располагаться преимущественно по контуру трансформатора. Общее число квантовых ячеек увеличивается пропорционально увеличению периметра трансформатора. При этом динамический диапазон такой антенны, увеличивающийся пропорционально корню квадратному из числа квантовых ячеек, будет увеличиваться с увеличением стороны чипа a как $\sqrt{a}$. Бестрансформаторная конструкция антенны позволяет значительно увеличить число ячеек в составе антенны и, следовательно, увеличить её динамический диапазон и амплитуду выходного сигнала. Динамический диапазон такой антенны растет линейно с увеличением стороны a.

На рисунке 7 а приведено семейство функций отклика напряжения на внешний поток экспериментального прототипа трансформаторной антенны с одним трансформатором магнитного потока [26]. Размер антенны $3{,}3\times3{,}3$ мм^2 и она содержит 80 дифференциальных квантовых ячеек по 10 переходов в каждом плече. Коэффициент преобразования составляет 750 мкВ/мкТл.

На рисунке 7 б изображена семейство функций отклика напряжения на внешний поток экспериментального прототипа бестрансформаторной антенны [20, 26]. Размер антенны $3{,}3\times3{,}3$ мм^2 и она содержит 408 дифференциальных квантовых ячеек по 12 переходов в каждом плече. Коэффициент преобразования такой бестрансформаторной антенны составил 5600 мкВ/мкТл.



а



б

Рис. 7. *(а)* Набор откликов напряжения трансформаторной антенны с одним трансформатором магнитного потока на внешнее магнитное поле (задаваемое “магнитным” током) с различной величиной смещения по магнитному потоку δΦ. Размер антенны 3,3×3,3 мм^2, она содержит 80 дифференциальных квантовых ячеек по 10 переходов в каждом плече, ток смещения 1,06·(10I_c), где I_c — критический ток одного перехода. *(б)* Набор откликов напряжения бестрансформаторной антенны на внешнее магнитное с различной величиной смещения по магнитному потоку δΦ. Размер антенны 3,3×3,3 мм^2, она содержит 408 дифференциальных квантовых ячеек по 12 переходов в каждом плече, ток смещения 1,04·(12I_c). Из работы [26].

Таким образов, в данной работе был разработан и исследован теоретически и экспериментально новый тип электрически малых антенн (ЭМА) — активных ЭМА на основе сверхпроводящих квантовых решеток. Такие антенны позволяют осуществлять одновременно прием и усиление широкополосных электромагнитных сигналов в частотной полосе от десятков герц до 10 ГГц. Разработанные базовые элементы (би-сквиды и дифференциальные квантовые ячейки) позволяют реализовывать активные ЭМА с линейностью выходного сигнала до 100 дБ. Разработанные широкополосные активные ЭМА открывают новые возможности в развитии технологий приема, обработки и защиты сигналов на основе широкополосных приемных систем.

Литература

1. Wheeler H. Fundamental Limitations of Small Antennas // Proceedings of the IRE. 1947. Vol. 35, no. 12. pp. 1479–1484. doi:10.1109/JRPROC.1947.226199.
2. Hansen R., Collin R. Small Antenna Handbook. – Wiley, 2011. P. 360. ISBN: 978-1-118-10685-3.
3. Hansen R. Electrically Small, Superdirective, and Superconducting Antennas. — Wiley, 2006. – P. 168. – ISBN: 978-0-470-04103-1.
4. McLean J. A re-examination of the fundamental limits on the radiation Q of electrically small antennas // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1996. – Vol. 44, no. 5. – pp. 672–676. doi:10.1109/8.496253/.

5. Sussman-Fort S. E. Matching network design using non-Foster impedances // International Journal of RF and Microwave Computer-Aided Engineering. – 2006. – Vol. 16, no. 2. – pp. 135–142. doi:10.1002/mmce.20118.
6. Luine J., Abelson L., Brundrett D. et al. Application of a DC SQUID array amplifier to an electrically small active antenna // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. – 1999. – Vol. 9, no. 2. – pp. 4141–4144. doi:10.1109/77.783937.
7. Oppenländer J., Häussler C., Schopohl N., Friesch A., Tomes J. Superconducting quantum antenna. – 2008. – May 6. – US Patent 7, 369, 093.
8. Kornev V., Sharafiev A., Soloviev I., Mukhanov O. High linearity voltage response differential cell // 14th International Superconductive Electronics Conference (ISEC): Conference Program, Abstract and Papers, pp. 268–270, 2013. doi:10.1109/ISEC.2013.6604307.
9. Kornev V., Soloviev I., Sharafiev A., Klenov N., Mukhanov O. Active Electrically Small Antenna Based on Superconducting Quantum Array // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. V. 2013. Vol. 23, no. 3. p. 1800405. doi:10.1109/TASC.2012.2232691.
10. Kornev V., Sharafiev A., Soloviev I., Kolotinskiy N., Scripka V., Mukhanov O. Superconducting Quantum Arrays // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. – 2014. – Vol. 24, no. 4. – p. 1800606. doi:10.1109/TASC.2014.2318291.
11. Kornev V., Soloviev I., Klenov N., Mukhanov O. Linear Bi-SQUID Arrays for Electrically Small Antennas // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. – 2011. – Vol. 21, no. 3. – p. 713–716. doi: 10.1109/TASC.2010.2091711.
12. Kornev V., Soloviev I., Klenov N., Mukhanov O. Bi-SQUID: a novel linearization method for dc SQUID voltage response // Superconductor Science and Technology. – 2009. – Vol. 22, no. 11. – p. 114011. doi:10.1088/0953-2048/22/11/114011.
13. Kornev V., Sharafiev A., Soloviev I., Mukhanov O. Signal and noise characteristics of bi-SQUID // Superconductor Science and Technology. – 2014. – Vol. 27, no. 11. – p. 115009. doi: 10.1088/0953-2048/27/11/115009.
14. Kornev V., Kolotinskiy N., Bazulin D., Mukhanov O. High-inductance bi-SQUID // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. – 2017. – Vol. 27, no. 4. – p. 1601304. doi: 10.1109/TASC.2016.2631427.
15. Kornev V., Soloviev I., Klenov N., Kolotinskiy N. Design Issues of HTS bi-SQUID // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. – 2016. – Vol. 26, no. 5. – p. 1601205. doi: 10.1109/TASC.2016.2544816.
16. Kornev V., Kolotinskiy N., Levochkina A., Mukhanov O. Critical current spread and thermal noise in bi-SQUID cells and arrays // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. – 2017. – Vol. 27, no. 4. – p. 1601005. doi: 10.1109/TASC.2016.2632125.
17. Kornev V., Kolotinskiy N., Scripka V., Sharafiev A., Mukhanov O. Output power and loading of Superconducting Quantum Array // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. – 2015. – Vol. 25, no. 3. – p. 1602005. doi:10.1109/TASC.2014.2373036.

18. Kornev V., Soloviev I., Klenov N., Mukhanov O. High Linearity SQIF-like Josephson-Junction Structure // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. — 2009. – Vol. 19, no. 3. – p. 741–744. doi: 10.1109/TASC.2009.2019543.
19. Kornev V., Soloviev I., Klenov N., Mukhanov O. Design and Experimental Evaluation of SQIF Arrays With Linear Voltage Response // IEEE Transactions Applied Superconductivity. – 2011. – Vol. 21, no. 3. – p. 394–398. doi:10.1109/TASC.2010.2095451.
20. Колотинский Н.В. Сверхпроводящие квантовые решетки как широкополосные активные устройства: Дис. канд. физ.-мат. наук. – МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 2015. – С. 127.
21. Kornev V., Sharafiev A., Soloviev I., Kolotinskiy N., Mukhanov O. A Guide to Active Antennas Based on Superconducting Quantum Arrays // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. – 2016. – Vol. 26, no. 3. – p. 1400104. doi: 10.1109/TASC.2016.2524461.
22. Sharafiev A., Kornev V., Kolotinskiy N., Mukhanov O. Microwave Dynamics of Superconducting Quantum Cell // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. – 2015. – Vol. 25, no. 3. – p. 1602306. doi:10.1109/TASC.2015.2390141.
23. Kornev V., Sharafiev A., Soloviev I., Kolotinskiy N., Mukhanov O. Dimensional Effects Affecting Linearity of Active Superconducting Antennas // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. – 2016. – Vol. 26, no. 3. – p. 1500605. doi: 10.1109/TASC.2016.2541608.
24. Kolotinskiy N., Kornev V., Sharafiev A., Soloviev I., Mukhanov O. Multielement Josephson structures for implementing broadband devices // Physics of Wave Phenomena. – 2013. – Vol. 23, no. 4. – pp. 294–299. doi:10.3103/S1541308X13040110.
25. Kornev V., Kolotinskiy N., Skripka V., Sharafiev A., Soloviev I., Mukhanov O. High Linearity Voltage Response Parallel-Array Cell // Journal of Physics: Conference Series. – 2014. – Vol. 507, no. 4. – p. 042018. doi:10.1088/1742-6596/507/4/042018.
26. Kornev V., Kolotinskiy N., Sharafiev A., Soloviev I., Mukhanov O. Broadband Active Electrically Small Superconductor Antennas // Superconducting Science and Technology. Отправлено в редакцию.

ВЛИЯНИЕ РЕАКТИВНОЙ АТМОСФЕРЫ ПРИ МАГНЕТРОННОМ НАПЫЛЕНИИ НА ЭВОЛЮЦИЮ ФАЗОВОГО СОСТАВА АЛМАЗОПОДОБНЫХ ПОКРЫТИЙ, ЛЕГИРОВАННЫХ ХРОМОМ

м. н. с. Левин И.С., доц Авдюхина В.М.,
в. н. с. Хрущов М.М. (ИМАШ), м. н. с. Шергунов В.А. (ИМАШ)

Создание высокопрочных покрытий и исследование их функциональных характеристик являются одной из актуальных задач физики конденсированного состояния вещества. Это связано как с потребностью создания материалов (покрытий) с заданными свойствами, так и с рекомендациями по увеличению ресурса работы таких систем. Решение этих задач неразрывно связано со структурными исследованиями, поскольку именно структурно-фазовые характеристики определяют практически все важнейшие физические и эксплуатационные свойства покрытий.

Особое место среди большого числа современных методов исследования реальной структуры материалов занимают рентгеноструктурные, позволяющие неразрушающим способом получить информацию о структуре и фазовом состоянии покрытий.

В настоящей работе исследовались образцы алмазоподобных (АПП) углеродных покрытий, легированных хромом, полученные с помощью технологии магнетронного распыления в активных газовых средах. Изучалось влияние особенностей нанесения покрытий (в первую очередь, состава атмосферы напыления) на их фазовый состав и тонкую атомную структуру.

В таблице 1 приведен список исследованных образцов с указанием газового состава активной атмосферы напыления при их напылении.

Таблица 1 Список образцов

№ образца	Состав активной атмосферы			
	Ar	C_2H_2	N_2	воздух
		(об.%)		
1	+	100	–	–
2	+	80	20	–
3	+	60	40	–
4	+	40	60	–
5	+	20	80	–
6	+	20	–	80
7	+	15	–	85
8	+	10	–	90

Во всех случаях происходило распыление металлической хромовой мишени. Источником углерода для образования алмазоподобной матрицы в покрытиях служил газ ацетилен C_2H_2, содержание которого снижалось по мере увеличения доли азота в составе атмосферы напыления. С целью установления влияния атомов кислорода на образование покрытий для трех образцов азот в составе атмосферы напыления заменялся воздухом.

С использованием растрового электронного микроскопа TESCAN MIRA с приставкой для энергодисперсионного микроанализа INCA на первом этапе исследования определялся элементный состав покрытий. Данное исследование позволяло значительно облегчить установление фазового состава АПП. Результаты исследования элементного состава покрытий приведены в таблице 2.

Было установлено, что отсутствие углерода (и, как следствие этого, алмазоподобной структуры) в покрытиях, нанесенных в содержавшей воздух активной газовой смеси, объясняется взаимодействием газообразного кислорода с адсорбированным на поверхность образцов углеродом, что влекло за собой образование газообразного монооксида углерода (CO), который откачивался вакуумирующей системой напылительной установки.

Образцы покрытий и исходные стальные заготовки (подложки), на которые они наносились, исследовались с помощью рентгеновского дифрактометра Thermo ARL X'TRA с вертикальным гониометром и энергодисперсионным детектором Пельтье на медном Kα-излучении. Все дифрактограммы обрабатывались по методике, описанной в [1-2], позволяющей вычесть из дифракционной картины вклад от подложки, поскольку глубина проникновения рентгеновских лучей была больше толщины покрытий. Полученные дифрактограммы от образцов покрытий приведены на рис. 1.

Таблица 2. Результаты исследования химического состава образцов.

№ образца	Содержание углерода, ат.%	Содержание азота, ат.%	Содержание кислорода, ат.%	Содержание хрома, ат.%
1	80,4±0,5	4,3±0,5	-	15,0±0,2
2	64,3±0,5	8,7±0,5	-	26,9±0,2
3	56,1±0,5	16,4±0,5	-	27,2±0,2
4	49,5±0,5	18,0±0,5	-	32,1±0,2
5	27,4±0,5	29,3±0,5	-	42,8±0,2
6	-	27,6±0,5	22,1±0,5	49,9±0,2
7	-	12,4±0,5	42,5±0,5	44,8±0,2
8	-	16,7±0,5	38,2±0,5	46,7±0,2

Видно, что общим для образцов №№ 1÷5 является наличие узкого дифракционного максимума с угловым положением ≈ 43,6 град. по 2θ, интенсивность которого немонотонно меняется по мере изменения состава активной атмосферы напыления и достигает максимума для образца № 5, нанесенного в атмосфере, максимально обогащенной чистым азотом.

Слева от этого максимума наблюдается широкое диффузное гало, ширина которого уменьшается по мере увеличения доли азота в активной атмосфере напыления. Заметим, что для образцов №№ 4 и 5 вместо гало наблюдается дифракционный максимум с угловым положением ≈ 36.5 град. Полученные результаты свидетельствуют о том, что происходит существенное изменение фазового состава хромовых покрытий в зависимости от состава активной смеси при получении таких АПП.

Также можно заметить, что положения дифракционных максимумов на рис. 1 для всех образцов, полученных в атмосфере напыления, содержавшей воздух, практически одинаковы, однако их интенсивности существенно отличаются, что может свидетельствовать об изменении содержания долей сосуществующих фаз в соответствующих покрытиях.

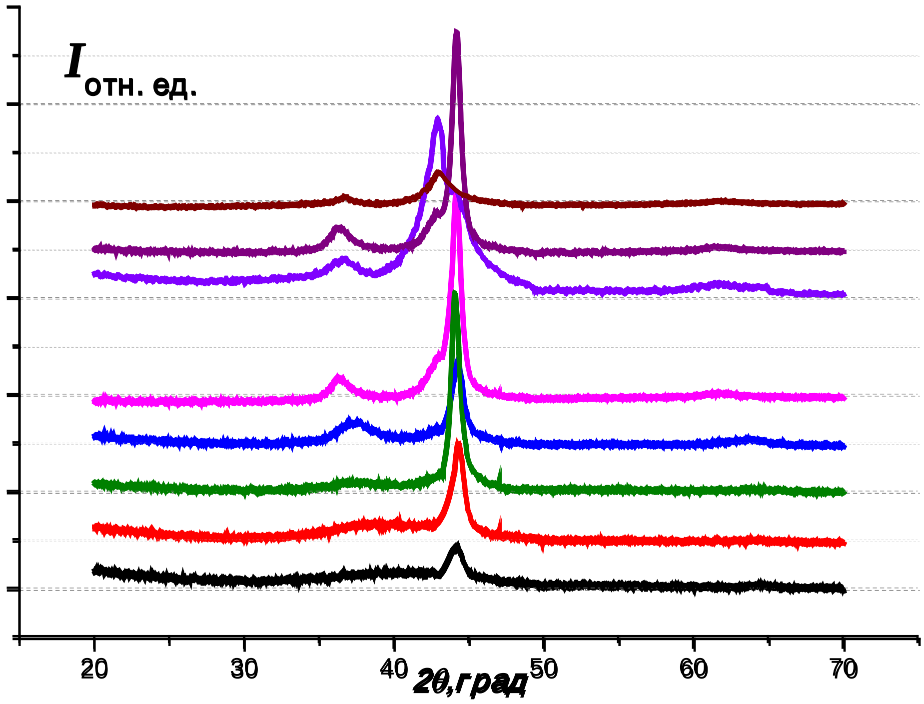


Рис. 1. Дифрактограммы от образцов покрытий с указанием состава активной атмосферы, в которой они были получены.

При определении фазового состава исследованных покрытий по данным элементного химического анализа вначале, используя картотеку дифракционных данных PDF-2 [3] проводилась выборка фаз, которые могли присутствовать в покрытиях. Затем путем наложения на экспериментальную дифракционную картину штрих-диаграммы, отображающей угловые положения дифракционных пиков для той или иной фазы (рассчитанные по данным из картотеки), из списка возможных фаз выбирались наиболее вероятные варианты с помощью программы «*Match!1.9*» [4]. Критерием выборки служило соответствие углового положения пиков фазы особенностям формы экспериментальной кривой.

Функционал программы «*MDI Jade 6.5*» [5] позволял синтезировать суммарную расчетную дифрактограмму для выбранного набора фаз, наличие которых предполагалось в образце покрытия. Данная синтезированная кривая представляла собой сумму пиков, смоделированных функциями псевдо-Войта. Это позволило провести процедуру подгонки расчетной кривой к экспериментальной (после вычитания из нее вклада от подложки) путем вариации интенсивностей, интегральных ширин и удельных долей функций Лоренца и Гаусса в их линейной комбинации. Критерием успешности этой подгонки служила минимизация параметра несоответствия (R_p):

$$R_p = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left| I_i^{э} - I_i^{р} \right|}{\sum_{i=1}^{N} I_i^{э}} \cdot 100\%$$

где $I^Э$ и $I^Р$ — экспериментальная и расчетная интенсивности.

Результаты определения фазового состава покрытий и долей сосуществующих в них фаз (из отношения суммарных интегральных интенсивностей) приведены в табл. 3, а пример определения — на рис. 2.

Таблица 3. Фазовый состав и относительная доля сосуществующих фаз.

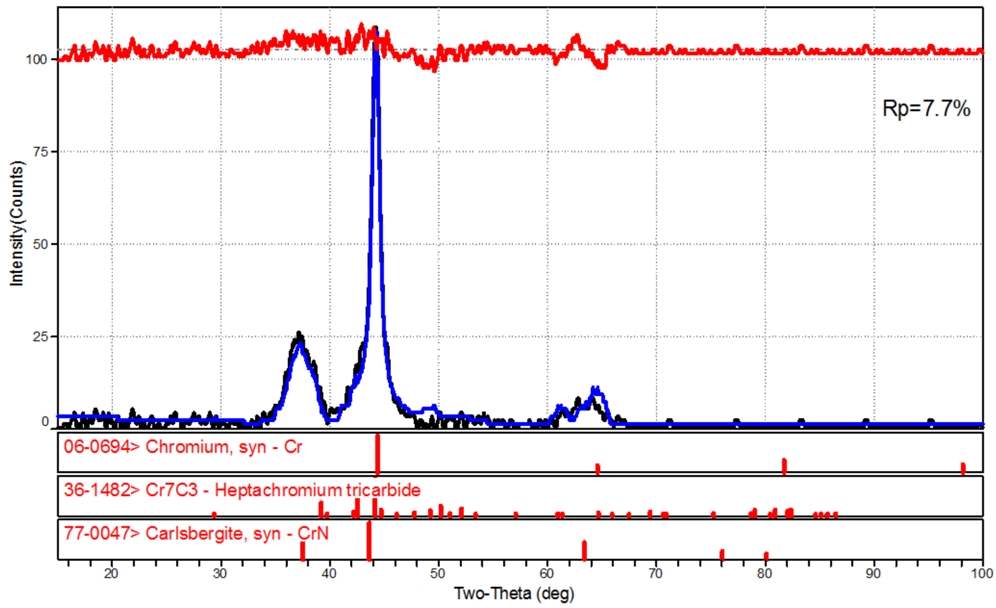
№ образца	Фазовый состав	Отношение долей фаз	R_p, ±0,5%
1	$Cr_{23}C_6$, Cr	1 : 1	7.8
2	$Cr_{23}C_6$, Cr	1 : 3	7.5
3	Cr_7C_3, Cr_2N, Cr	1 : 1 :1	3.1
4	Cr_7C_3, CrN, Cr	2 : 1 : 1	7.7
5	Cr_3C_2, CrN, Cr	1 : 1 : 1	7.2
6	$Cr_2O_{2.4}$, Cr_2N, Cr	1 : 4 : 1	5.4
7	$Cr_2O_{2.4}$, Cr_2N, Cr	2 : 1 : 2	6.5
8	Cr_2O_3, Cr_2N, Cr	2 : 3 : 1	6.5

Фазовый анализ исследованных образцов покрытий №№ 1–5 показал, что в них присутствуют фазы чистого хрома и карбидов хрома. По мере изменения состава активной атмосферы напыления вид дифрактограмм от соответствующих покрытий существенно менялся, что было связано с изменением структурного типа фаз карбида хрома в покрытиях (от $Cr_{23}C_6$ к Cr_7C_3). В итоге при минимальной доле ацетилена в атмосфере напыления наблюдалась фаза карбида хрома Cr_3C_2.

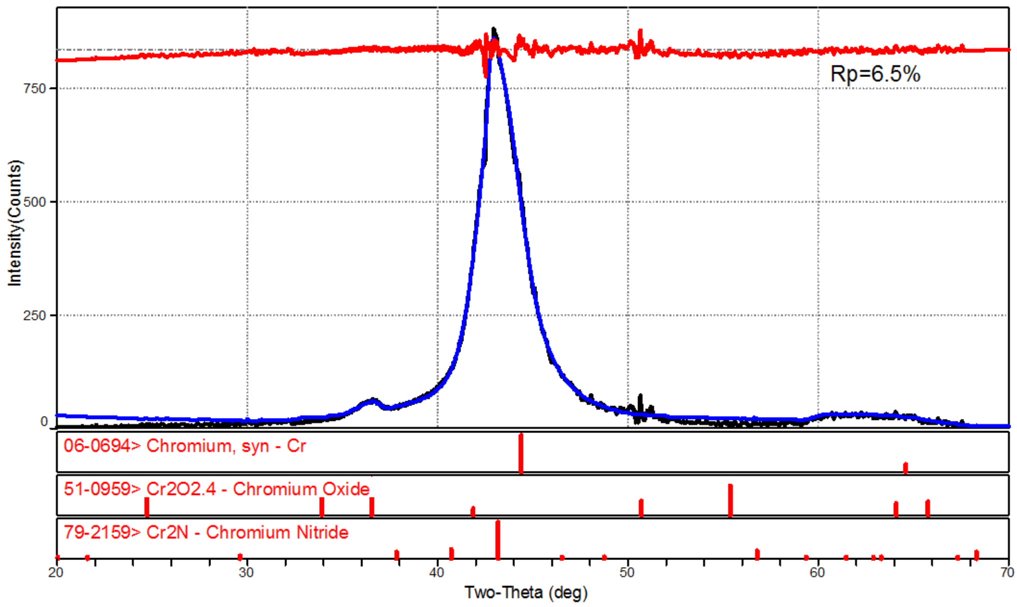
Дополнительная фаза нитрида хрома была обнаружена в образцах, полученных при содержании азота в атмосфере напыления более 40 об.%, причем в образце № 3 эта фаза обеднена азотом (Cr_2N) по сравнению с тем, что наблюдалось в образцах №№ 4 и 5 (CrN).

В покрытиях, синтезированных в атмосферах, содержавших кислород, вместо карбидных наблюдались оксидные фазы хрома.

По результатам проведенного фазового анализа был сделан вывод о влиянии состава активной атмосферы не только на химический, но и на фазовый состав получаемых покрытий. Действительно, по мере увеличения объемной доли азота в активной атмосфере при синтезе покрытий наблюдается смена типа карбидных фаз хрома и дополнительно выделение фазы нитрида хрома.



Образец № 4.



Образец № 7.

Рис. 2. Результат определения фазового состава некоторых из покрытий.

Из данных об уширении дифракционных максимумов для образцов покрытий №№ 1–5 по формуле Селякова-Шеррера были оценены размеры областей когерентного рассеяния (ОКР) чистого хрома, его нитридных и карбидных фаз. Погрешность расчета величины размеров ОКР составляла ±0,5 нм. Результаты расчетов представлены на рис. 3.

Оказалось, что размер ОКР (D) фазы чистого хрома существенно превышает характерный размер включений его нитридных и карбидных фаз. По мере увеличения объемной доли азота и уменьшения доли ацетилена в активной атмосфере напыления наблюдалось увеличение размеров ОКР фаз чистого хрома и его нитридов, тогда как для величин ОКР карбидных фаз хрома данной тенденции не наблюдалось Можно заключить, что исследуемые покрытия являются наноструктурированными, поскольку рассчитанные значения ОКР меньше 15 нм.

Для подтверждения результатов фазового анализа был проведен расчет парных функций радиального распределения атомов (ПФРР) G(r) для всех исследованных образцов покрытий, который производился с помощью компьютерной программы «PDFgetX3» [6].

$$G(r)=\left(2/\pi\right)\int_0^\infty q\left[S(q)-1\right]\sin\left(\mathrm{q}r\right)d\mathrm{q}$$

где S(q) = 1 + [Icoh(q) — Σci|fi(q)|2] / |Σcifi(q)|2 — парциальная функция Фабера–Займана, ci — атомная концентрация, fi (q) — атомный фактор рассеяния.

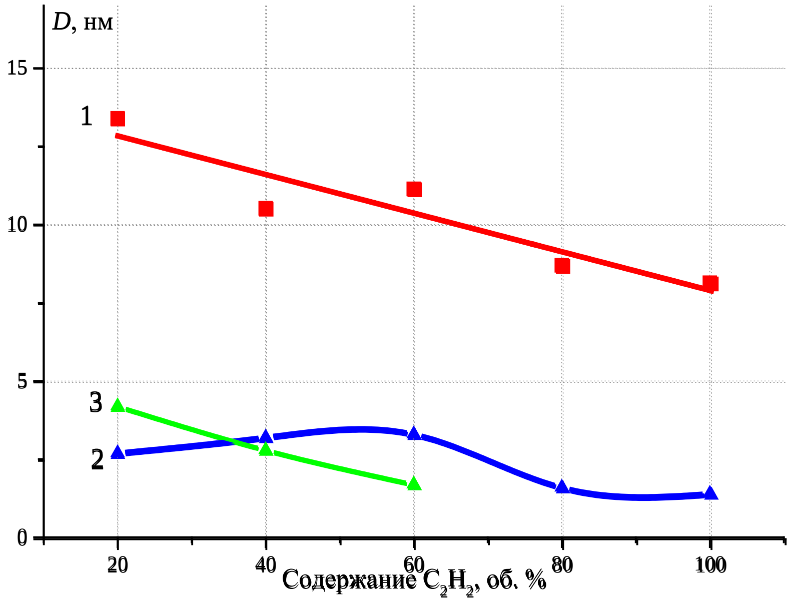


Рис. 3. Зависимости размеров блоков ОКР (D): 1 — хрома, 2 — карбидных и 3 — нитридных фаз хрома от содержания ацетилена в активной атмосфере при синтезе покрытий.

Измеренная в эксперименте зависимость интенсивности от угла рассеяния 2θ перестраивалась в масштабах длины дифракционного вектора $q=4\pi\sin(\theta)/\lambda$. Она включала в себя интенсивность рассеяния образцом, воздухом и космическим фоном, который измерялся при закрытом окне рентгеновской трубки и не превышал 0,1 имп/с. Рассеяние воздухом регистрировалось в отсутствии образца. Для бесконечно толстого образца поправка на рассеяние воздухом бралась равной Iвозд(q)/2. В случае сложных соединений, к которым относятся исследуемые образцы, поглощение рентгеновских лучей представляло собой сумму поглощений всеми вносящими вклад в него химическими элементами с учетом их концентраций. Результаты проведенного расчета ПФРР приведены на рис.4.

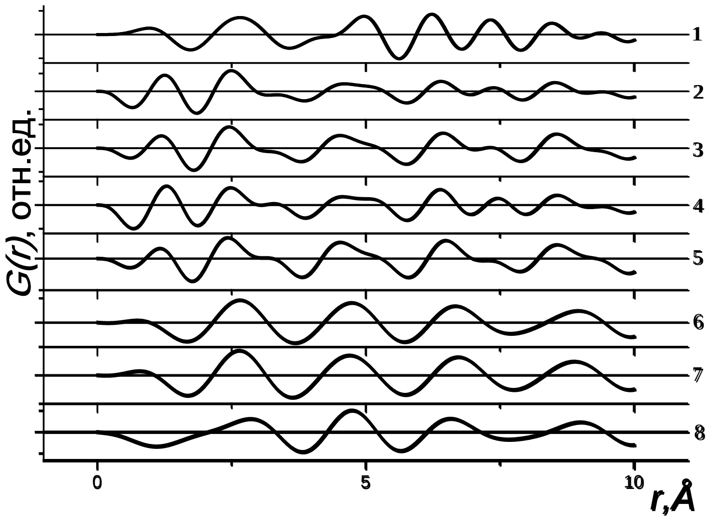


Рис. 4. ПФРР покрытий, a-C:H:Cr полученных при различном составе атмосферы (номер образца указан согласно табл. 1).

Было установлено, что рассчитанные длины атомных связей, которым соответствуют положения локальных максимумов ПФРР (табл. 4), качественно подтверждают результаты фазового анализа для всех исследованных образцов покрытий.

Отсутствие точного согласия с литературными данными [7] связано с тем, что в литературе приводятся данные по межатомным связям для идеальных кристаллических структур (фаз), тогда как исследованные покрытия обладают сложной дефектной структурой, на что указывает вид их рентгеновских дифракционных спектров. Кроме того, технологии синтеза АПП, использованные в данной работе, неизбежно приводят к возникновению в покрытиях преимущественных ориентировок (текстур). Такая аксиальная текстура с осью <110>, как видно из дифрактограмм (рис. 1), действительно существует.

По результатам проведенной работы можно заключить, что атомно-кристаллическая структура и фазовый состав алмазоподобных углеродных покрытий, полученных методом магнетронного распыления хрома в реактивной атмосфере ацетилена и азота, существенно зависит от особенностей используемой технологии нанесения покрытий.

Установлено, что повышение концентрации азота в составе реактивной атмосферы напыления увеличивает интенсивность образования наноразмерных выделений фазы нитрида хрома в покрытиях, а замещение азота воздухом в составе активной газовой смеси приводит к отсутствию алмазоподобной структуры в покрытиях.

Показано, что метод парной функции радиального распределения атомов, рассчитанной из данных рентгендифракционного эксперимента, качественно подтверждает результаты проведенного фазового анализа и оценку среднего размера зерна в исследованных покрытиях.

Таблица 4. Положения максимумов ПФРР для исследованных покрытий.

№№ образцов	1	2	3	4	5	6–8
r, Å	0.98	1.26	1.18	1.28	1.17	0.79
	2.66	2.50	2.45	2.50	2.43	2.65
	4.16	3.33	3.26	3.33	3.12	4.71
	4.97	4.58	4.50	4.58	4.62	6.70
	6.22	5.31	5.20	5.31	5.20	8.89
	7.30	6.36	6.46	6.36	6.46	–
	8.45	7.40	7.37	7.51	7.37	–
	9.39	8.52	8.59	8.59	8.59	–
	–	9.42	9.39	9.42	9.39	–

Таким образом можно констатировать, что метод магнетронного распыления хрома в реактивной атмосфере ацетилена и азота является перспективным для формирования гетерофазной структуры покрытий *a*-C:H:Cr, состоящей из наноструктурированных областей металлической фазы хрома и наноразмерных выделений фаз карбидов и нитрида хрома. Установленные структурно-фазовые параметры исследованных покрытий свидетельствуют об их возможных высоких функциональных характеристиках. Метод магнетронного распыления хрома в реактивной атмосфере ацетилена и азота позволяет управлять структурно-фазовыми характеристиками покрытий *a*-C:H:Cr путем изменения состава активной атмосферы при изготовлении покрытий.

Литература

1. Хрущов М.М., Свешников С.В. // Наноинженерия. 2012, № 8, с. 37.
2. Левин И.С., Хрущов М.М., Марченко Е.А., Авдюхина В.М. // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. 2016, № 2, с. 46.
3. http://www.icdd.com/products/pdf2.htm
4. http://www.crystalimpact.com/match/
5. http://www.materialsdata.com/products.htm
6. Juhás P., Davis T., Farrow C. L., Billinge S. J. L. // J. Appl. Cryst. 2013, v 46(2), p. 560.
7. McClune F. // Powder Diffraction. 1986, v. 1, p. 77.

ОСОБЕННОСТИ ЭЛЕКТРОННОГО ПЕРЕНОСА В НАНОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ОКСИДАХ ИНДИЯ И ЦИНКА

Ас. *М.Н. Мартышов*, асп. *А.С. Ильин*, в.н.с. *П.А. Форш*,
н. с. *М.И. Иким*, проф. *Л.И. Трахтенберг*, проф. *П.К. Кашкаров*

В настоящее время оксиды металлов считаются перспективными материалами, которые имеют широкое применение в разных областях техники. Одними из наиболее используемых являются нанокристаллические оксид цинка (ZnO) и оксид индия (In_2O_3). Свойства оксидов сильно зависят от структуры и методов приготовления. Например, температурные зависимости проводимости оксидов индия и цинка в зависимости от метода получения, структуры и диапазона температур могут быть активационными с одной энергией активации [1], или иметь два участка с разными энергиями активации [2], или даже проводимость может уменьшаться с ростом температуры в некотором интервале температур [3]. В литературе отсутствует однозначная интерпретация наблюдаемых зависимостей проводимости ZnO и In_2O_3 от температуры. Также много усилий ученых направлено на исследование фотопроводимости наноструктурированных полупроводников из оксидов металлов. Для объяснений характерных для таких полупроводников явлений долговременной релаксации фотопроводимости и остаточной фотопроводимости разрабатываются разные модели [4, 5], но однозначного объяснения наблюдаемых явлений нет. Вполне возможно, что это связано с отсутствием совместного исследования проводимости и релаксации фотопроводимости на образцах различных нанокристаллических оксидов металлов. В данной работе были исследованы температурные зависимости темновой проводимости, спектральные зависимости фотопроводимости и спад фотопроводимости нанокристаллических оксидов индия и цинка, обладающих примерно одинаковыми структурными параметрами с целью установления некоторых общих закономерностей в нанокристаллических оксидах металлов.

Оксидные пленки синтезировались из порошков In_2O_3 и ZnO со средним размером нанокристаллов 50-80 нм. Измерения температурных зависимостей темновой проводимости образцов проводились в области температур 270–470 К. Для измерения фотоэлектрических характеристик исследуемых образцов в качестве источника излучения использовался ультрафиолетовый светодиод с длиной волны 385 нм и интенсивностью 5 мВт/см^2. Величина фотопроводимости (σ_{ph}) определялась как разность проводимостей образца при освещении (σ_{ill}) и темновой проводимости (σ_d).

$$\sigma_{ph} = \sigma_{ill} - \sigma_d.$$

Измерения спектральной зависимости фотопроводимости осуществлялись путем освещения образцов монохроматическим светом в диапазоне 380-610 нм с использованием мощной ксеноновой лампы ДКСЛ-1000 и монохроматора МДР-12. Интенсивность падающего на образец монохроматического света составляла примерно 2 мВт/см^2 на всем спектральном диапазоне.

В исследованном диапазоне температур проводимость пленок нанокристаллического оксида индия на несколько порядков выше проводимости пленок нанокристаллического оксида цинка. На температурных зависимостях проводимости можно выделить по два активационных участка с разными энергиями активации, описываемых выражением

$$\sigma(T) = \sigma_0 \exp\left(-\frac{E_a}{kT}\right), \qquad (1)$$

где k – постоянная Больцмана, а σ_0 – коэффициент, не зависящий (или слабо зависящий) от температуры. При увеличении температуры энергия активации увеличивается для обоих оксидов. Причем энергии активации проводимости оксида цинка в несколько раз выше энергий активации проводимости оксида индия.

Согласно спектральным зависимостям фотопроводимости оксидов, для In_2O_3, и для ZnO фотопроводимость появляется при энергиях кванта света, меньших ширины запрещенной зоны. Это может свидетельствовать о наличии в запрещенной зоне локализованных состояний, дающих вклад в фотопроводимость исследованных оксидов.

Релаксация фотопроводимости обоих образцов может быть аппроксимирована следующей формулой

$$\sigma(t) = A_1 \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) + A_2 \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right), \qquad (2)$$

где A_1и A_2 — предэкспоненциальные множители, не зависящие от времени, τ_1 и τ_2 — эффективные времена релаксации фотопроводимости. Причем $\tau_1 \ll \tau_2$, а релаксация фотопроводимости оксида цинка идет быстрее, чем релаксация фотопроводимости оксида индия.

Для описания полученных зависимостей была предложена модель двух эффективных донорных уровней. Тогда изменение энергии активации проводимости при увеличении температуры объясняется тем, что при нагревании уровень Ферми смещается вниз. В интервале более низких температур происходит ионизация мелкого донорного уровня, а в интервале более высоких температур ионизируется глубокий донорный уровень. Происхождение этих уровней может быть различным. Это могут быть как дефектные состояния внутри нанокристаллов, так и поверхностные состояния на границах нанокристаллов. Также это могут быть состояния кислородных вакансий, в большой концентрации содержащиеся в нанокристаллических оксидах металлов. Существование локализованных состояний в запрещенной зоне оксидов может подтверждаться фотопроводимостью при освещении светом с энергией кванта, меньшей ширины запрещенной зоны, характерной для обоих оксидов.

Учет локализованных состояний в запрещенной зоне исследованных оксидов ZnO и In_2O_3 позволяет прояснить вопрос о механизмах, определяющих релаксацию фотопроводимости исследованных образцов. Наблюдаемую медленную релаксацию фотопроводимости можно объяснить, если предположить, что рекомбинация носителей заряда происходит через два локализованных уровня, расположенных в запрещенной зоне. В формуле (2) одна экспонента с бóльшим временем релаксации описывает рекомбинацию через более мелкий уровень, а другая — через более глубокий уровень. Какие именно уровни работают как рекомбинационные центры в исследованных In_2O_3 и ZnO, сказать трудно. Однако, можно предположить, что эти уровни являются довольно мелкими, поскольку мелкие уровни работают в большей степени как ловушки, а не как рекомбинационные центры.

Литература

1. Studenikin S.A., Golego N., Cocivera M. Carrier mobility and density contributions to photoconductivity transients in polycrystalline ZnO films. // Journal of Applied Physics. 2000. V. 87. No. 5. P. 2413–2421.
2. Forsh E.A., Marikutsa A.V., Martyshov M.N. et al. Charge carrier transport mechanisms in nanocrystalline indium oxide. // Thin Solid Films. 2014. V. 558. P. 320–325.
3. Белышева Т.В., Герасимов Г.Н., Громов В.Ф. и др. Структура и физико-химические свойства наноструктурированных пленок оксидов металлов – чувствительного слоя газовых сенсоров// Журнал Физической Химии. 2010. Т. 84. № 9. С. 1706–1711
4. Li Q.H., Gao T., Wang Y.G., Wang T.H. Adsorption and desorption of oxygen probed from ZnO nanowire films by photocurrent measurements. // Applied Physics Letters. 2005. V. 86. P. 123117 (3 pp).
5. Шейнкман М.К., Шик А.Я. Долговременные релаксации и остаточная проводимость в полупроводниках. // Физика и Техника Полупроводников. 1976. Т. 10. № 2. С. 209–232.

САМОАККОМОДАЦИЯ МАРТЕНСИТНЫХ КРИСТАЛЛОВ В СПЛАВАХ С ЭФФЕКТАМИ ПАМЯТИ ФОРМЫ

Проф. *Хунджуа А.Г.*, доц. *Володин Б.А.*, вед. электр. *Птицын А.Г.*, доц. *Бровкина Е.А.*

В сплавах с эффектами памяти формы двойникование мартенситных кристаллов в процессе их роста может приводить к формированию самоаккомодационных комплексов (СК) доменов — вариантов ориентационного соотношения. Деформация формы, усредненная по такому комплексу, описывается единичной матрицей, т.е. компенсация формоизменения и минимизация упругой энергии происходит на микроуровне отдельных мартенситных кристаллов (а не только на уровне зерна аустенита, как это бывает для большинства фазовых превращений других типов).

Строение самоаккомодационного комплекса определяется его доменной внутренней структурой, т.е. задействованными плоскостями двойникования. Число возможных вариантов доменной структуры самоаккомодационных комплексов ограничено, поддается прогнозированию и классификации, ввиду того, что аустенит всегда имеет кубическую решетку, что определяет число кристаллографически эквивалентных вариантов ориентационного соотношения ОС (число различных доменов) в интервале от 4-х до 24-х. Переход от домена к домену описывается с помощью одного из 24-х операторов симметрии решетки аустенита, из которых 9 являются одновременно и операторами двойникования.

Нами было показано, что каждому типу СК можно поставить в соответствие одну из подгрупп группы симметрии решетки аустенита, что в том числе указывает и на ограниченное число типов СК.

Не в каждом сплаве с термоупругим мартенситным превращением самоаккомодация возможна. Она требует наличия нескольких плоскостей двойникования мартенсита, параллельных плоскостям симметрии аустенита, что в случае низко симметричной решетки мартенсита маловероятно. В этом отношении наиболее благоприятен для выполнения условия параллельности соответствующих плоскостей случай мартенситного превращения путем дисторсии кубической решетки аустенита. Малая дисторсии кубической решетки оставляет практически параллельными системы плоскостей типа {110} и {100} в решетках аустенита и мартенсита, открывая, с другой стороны, возможность двойникования решетки мартенсита по многим из этих плоскостей. Например, в сплавах на основе γ-марганца при мартенситном превращении ГЦК аустенита в тетрагональный или орторомбический мартенсит открывается возможность двойникования по четырем или шести плоскостям типа {110} (в кубической решетке двойникование по ним невозможно в силу соображений симметрии).

Рассмотрим переход в тетрагональный мартенсит и за исходный примем вариант ОС, для которого стороны элементарной тетрагональный ячейки мартенсита направлены соответственно вдоль базисных осей аустенита [100], [010] и ось с вдоль [001]. Элементарные ячейки решеток аустенита и мартенсита преобразуются друг в друга путем однородной деформации, которая в применении к сфере единичного радиуса превращает её в эллипсоид вращения (тождественный эллипсоиду деформации): сфера

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad \rightarrow \qquad \frac{x'^2}{(1+\varepsilon_1)^2} + \frac{y'^2}{(1+\varepsilon_1)^2} + \frac{z'^2}{(1+\varepsilon_3)^2} = 1.$$

Двойникование по плоскости (101) оставляет направление оси y' неизменным, а оси x' и z' обмениваются местами. В результате уравнение эллипсоида принимает вид

$$\frac{x'^2}{(1+\ \varepsilon_3)^2}+\frac{y'^2}{(1+\ \varepsilon_1)^2}+\frac{z'^2}{(1+\ \varepsilon_1)^2}=1.$$

При двойниковании исходного варианта ОС по другой плоскости (011) уравнение эллипсоида:

$$\frac{x'^2}{(1+\ \varepsilon_1)^2}+\frac{y'^2}{(1+\ \varepsilon_3)^2}+\frac{z'^2}{(1+\ \varepsilon_1)^2}=1.$$

Сумма трех уравнений дает представление о средней деформации по комплексу:

$$\left\{\frac{2}{(1-\ \alpha)^2}+\frac{1}{(1+\ \gamma)^2}\right\}[x^2+y^2+z^2]=3,$$

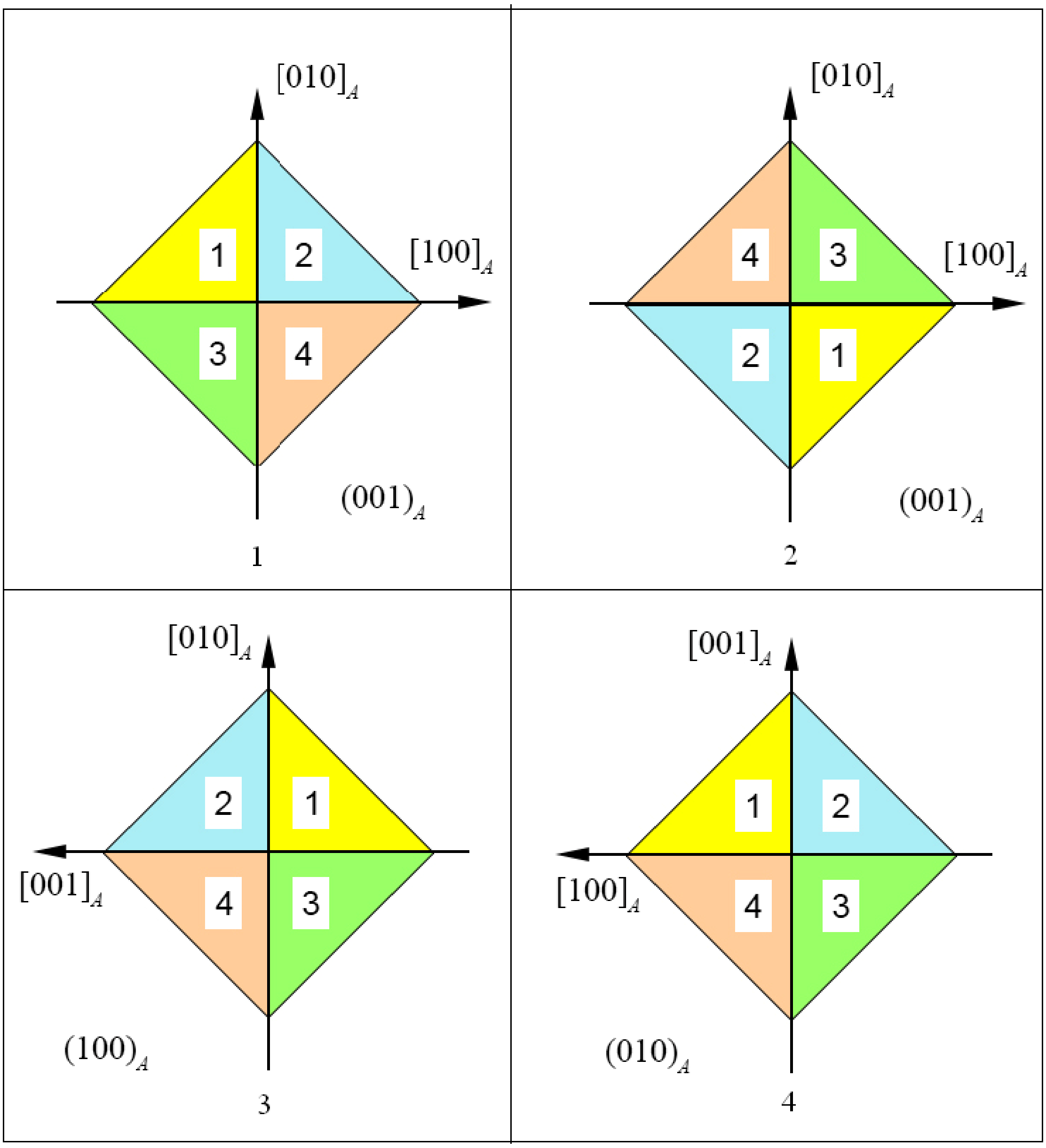
что равносильно уравнению исходной сферы, т.к.

$$\frac{2}{(1-\alpha)^2}+\frac{1}{(1+\gamma)^2}=3$$

в силу сохранения объема элементарной ячейки при мартенситном превращении.

В сплавах на основе никелида титана при мартенситном превращении ОЦК B2-аустенита в ромбоэдрический R-мартенсит открывается возможность двойникования по трем плоскостям типа {100}. Ромбоэдрическая структура R-мартенсита может быть получена растяжением исходной B2-кубической решетки аустенита вдоль одной из пространственных диагоналей куба (направления <111>). У куба 4 пространственных диагонали, тогда и эквивалентных вариантов ОС между решетками аустенита и R-мартенсита также будет 4. Решетка R-мартенсита двойникуется по плоскостям типа $\{100\}_R$, практически параллельным (в силу малости ромбоэдрической дисторсии) плоскостям аустенита с теми же индексами $\{100\}_{B2}$.

Проведем последовательное двойникование исходного мартенситного кристалла (вариант 1) по двум плоскостям, параллельным плоскостям симметрии аустенита (100) и (010). Полученный комплекс — «четверик», содержит 4 домена, отвечающих четырем разным вариантам ОС. Схема расположения доменов в СК — «четверик», приведена на рисунке 1 (плоскости двойникования перпендикулярны плоскости рисунка). Но имеется ещё одна возможная плоскость двойникования — параллельная плоскости симметрии аустенита (001) (эта плоскость лежит в плоскости рисунка 1). Двойникование «четверика» по этой плоскости разделяет комплекс на две части — нижнюю и верхнюю, но не добавляет новых вариантов ОС, а приводит лишь к повороту одной части относительно другой на 180° (рис. 2). Поскольку все возможные варианты ОС включены в комплекс, то он с очевидностью будет самоаккомодационным.



Таким образом, СА комплекс R-мартенсита представляет собой октаэдр, построенный из двух соединенных основаниями четырехугольных пирамид. Расположение доменов в экваториальном сечении (по плоскости двойникования, параллельной плоскости $(001)_{B2}$) и в двух других сечениях, по плоскостям двойникования, параллельным плоскостям $(100)_{B2}$ и $(010)_{B2}$, проходящим через ребра октаэдра, приведены на рис. 3 и 4.

РАСШИРЕНИЕ ПАКЕТА ПРОГРАММ ПО РАСЧЕТУ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАРТЕНСИТНЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ

Проф. *Хунджуа А.Г.*, доц. *Володин Б.А.*, доц. *Бровкина Е.А.*,
вед. програм. *Мельников М.М.*

На кафедре физики твердого тела физического факультета МГУ разработан пакет программ по расчету кристаллографических характеристик фазовых превращений. В учебной работе на базе этих программы функционирует компьютерный практикум по кристаллографии, задачи которого включены в спецпрактикум кафедры. В научной работе программы ориентированы на расчет характеристик мартенситных превращений в сплавах с эффектами памяти формы. Основой пакета является программа по моделированию точечных картин дифракции на монокристалле (зерне поликристалла), в котором в результате фазового превращения сформировалась двухфазная структура. Картина дифракции на таком объекте содержит в себе информацию о кристаллической структуре исходной фазы (аустенита) и фазы выделения (мартенсита) — параметры решетки, ориентационное соотношение, и соответствующий расчет позволяет извлечь данную информацию из экспериментальных точечных картин дифракции.

Имеющийся в наличии пакет программ предусматривает:

- расчет матрицы $\hat{A}$ ориентационного соотношения (перехода между базисами решеток аустенита и мартенсита);
- учет кристаллографически эквивалентных вариантов ориентационного соотношения с помощью группы операторов симметрии аустенита $\hat{S}_i$ (в сплавах с эффектами памяти формы аустенит всегда имеет кубическую решетку);
- моделирование рентгенограмм двухфазных кристаллов на смешанном излучении (рефлексы основной фазы формируются на белом излучении, рефлексы фазы выделения — на характеристическом);
- учет двойникования кристаллов мартенситной фазы, характерного для всех мартенситных сплавов и играющее в механизме эффекта памяти формы не меньшую роль, чем перестройка кристаллической решетки;
- разворот кристаллической решетки мартенсита на некоторый угол относительно первоначально заданной ориентации (разворот кристаллов мартенсита как целого), вызванный релаксацией упругой энергии.

Посредством интерактивного окна вводятся исходные данные моделирования: геометрия съемки, длина волны характеристического излучения, интервал длин волн спектра сплошного излучения, параметры кристаллических решеток основной фазы и мартенсита, ориентационное соотношение, плоскость двойникования, направление оси и величина поворота кристалла мартенсита. Кроме того, в главное меню программы включен еще ряд настроек моделирования, которые дают возможность изменять размер узла обратной решетки основной и выделяющейся фаз, пределы перебора индексов узлов обратной решетки мартенсита, закон погасания.

После введения исходных данных практически мгновенно рассчитанная рентгенограмма или микроэлектронограмма выводится на экран, и может быть распечатана в масштабе, соответствующем эксперименту.

Кроме моделирования дифракционной картины программа позволяет получить сведения, касающиеся возможности самоаккомодации мартенситных кристаллов — т.е. наличие плоскостей двойникования мартенсита, параллельных плоскостям симметрии аустенита. Это условие является необходимым для реализации эффектов памяти формы в мартенситных сплавах с атомно-неупорядоченной решеткой.

В настоящей работе осуществлено дальнейшее расширение возможностей пакета программ, нацеленное на расчет габитуса мартенситных кристаллов. Габитусная плоскость определяется как плоскость, в которой мартенситное превращение не изменяет протяженность линейных объектов. В соответствии с феноменологической теорией мартенситных превращений габитусные поверхности в общем случае являются коническими и определяются пересечением сферической поверхности исходной области аустенита с прямым и обратным эллипсоидами деформации.

Элементарные ячейки решеток аустенита и мартенсита преобразуются друг в друга путем однородной деформации, которая математически описывается с помощью матричного уравнения $|r'\rangle = \hat{\mathrm{E}}|r\rangle$, где $\hat{\mathrm{E}} = \hat{1} + \hat{\varepsilon}$ матрица с элементами $\mathrm{E}_{ij} = \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}$ б,

$\hat{\varepsilon}$ — тензор деформаций. Матрицы $\hat{\mathrm{E}}$ и матрица ориентационного соотношения $\hat{A}$ связаны простым уравнением $\hat{\mathrm{E}} = \hat{A}^{-1}$.

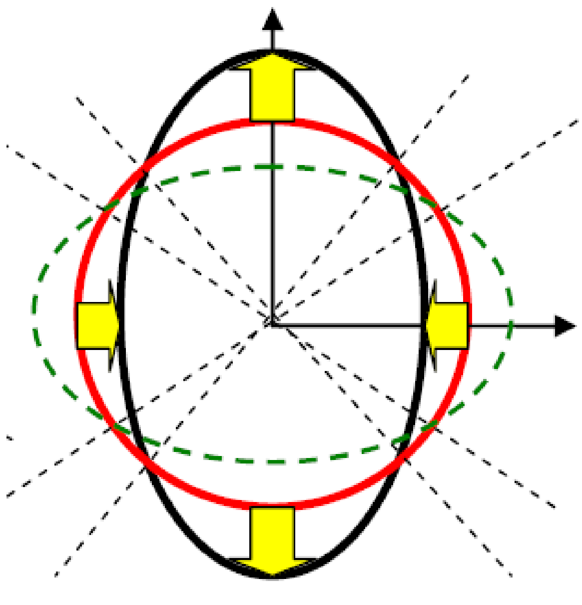


Рис. 1.

При однородной деформации сфера единичного радиуса превращается в трехосный *эллипсоид деформации*. Деформация раскладывается на составляющие — чистую деформацию и вращение. При чистой деформации главные оси без поворота меняют свою длину в η_1, η_2, η_3 раз. Соответствующие удлинения $\{(\eta_1 - 1); (\eta_2 - 1); (\eta_3 - 1)\}$ являются главными деформациями. Интерес представляет собой и *эллипсоид обратных деформаций* — эллипсоид, который однородная деформация преобразует в сферу единичного радиуса (пунктирный эллипс на рисунке 1).

В системе координат, связанной с главными осями деформации, уравнения единичной сферы, эллипсоида деформации и эллипсоида обратной деформации имеют вид: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$; $\frac{x_1^2}{\eta_1^2} + \frac{x_2^2}{\eta_2^2} + \frac{x_3^2}{\eta_3^2} = 1$;

$$\eta_1^2 x_1^2 + \eta_2^2 x_2^2 + \eta_3^2 x_3^2 = 1.$$

Решение систем уравнений выявляет направления, вдоль которых деформация не меняет длин векторов. Эти направления лежат на конических поверхностях, проходящих через пересечения единичной сферы с эллипсоидом деформации и эллипсоидом обратной деформации, т. е. удовлетворяют уравнениям:

$$\left(1 - \frac{1}{\eta_1^2}\right) x_1^2 + \left(1 - \frac{1}{\eta_2^2}\right) x_2^2 + \left(1 - \frac{1}{\eta_3^2}\right) x_3^2 = 0;$$

$$\left(1 - \eta_1^2\right) x_1^2 + \left(1 - \eta_2^2\right) x_2^2 + \left(1 - \eta_3^2\right) x_3^2 = 0$$

Поверхности становятся плоскими, если одна из главных деформаций равна нулю, и конические поверхности вырождаются в плоскости, которые, в конечном счёте, и определяют инвариантную плоскость, не меняющую своей ориентации при превращении. Например, если $\eta_1 = 1; \quad \eta_2 > 1; \quad \eta_3 < 1$, то уравнение (1.5) принимает вид

$\left(\eta_2^2 - 1\right) x_2^2 = -\left(1 - \eta_3^2\right) x_3^2$, или $\sqrt{\left(\eta_2^2 - 1\right)}\, x_2 = \pm\sqrt{\left(1 - \eta_3^2\right)}\, x_3$ — уравнение плоскости.

Программа, исходя из матрицы ориентационного соотношения, приводит уравнение эллипсоида деформации к главным осям. При этом наибольшая ось эллипсоида определяет максимальную величину обратимой неупругой деформации мартенситного превращения. Где это возможно, программа вычисляет индексы габитусных плоскостей.

Кроме того, ориентация главных осей эллипсоида деформации определяет минимальное число доменов мартенсита в самоаккомодационном комплексе.

ФОНОВАЯ ТЕПЛОЕМКОСТЬ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛОВ

Доц. *Шнайдштейн И.В.*

Теплоемкость кристалла, претерпевающего фазовый переход из одной своей модификации в другую, может быть представлена в виде суммы аномальной и фоновой теплоемкостей. Аномальной (избыточной) называют часть теплоемкости, связанную с фазовым переходом. Эта часть теплоемкости не наблюдается, если измерения проводить при фиксированном значении параметра фазового перехода. Фоновой теплоемкостью кристалла называют сумму его решеточной теплоемкости и иных вкладов, не связанных с фазовым переходом, например, вклада в теплоемкость теплового расширения. При анализе экспериментальных температурных зависимостей теплоемкости кристаллов, построение фоновой теплоемкости является частью процедуры интерполяции экспериментальных данных аналитической зависимостью.

Поскольку термодинамика сегнетоэлектрического фазового перехода адекватно описывается теорией фазовых переходов Л.Д. Ландау, то фоновая теплоемкость сегнетоэлектрического кристалла ассоциируется с теплоемкостью, связанной с не зависящей от параметра фазового перехода частью термодинамического потенциала Ландау. В этой связи, построение фоновой теплоемкости является необходимым этапом интерпретации экспериментальных данных о температурной зависимости теплоемкости для сегнетоэлектрических кристаллов. Этот этап предшествует выделению избыточной теплоемкости, знание которой дает возможность определить род фазового перехода, вычислить коэффициенты термодинамического потенциала Ландау и другие количественные характеристики сегнетоэлектрического фазового перехода.

Поскольку фоновая теплоемкость кристалла в значительной степени определяется его решеточной теплоемкостью, то построение фоновой теплоемкости по экспериментальной температурной зависимости теплоемкости кристалла позволяет получить независимую информацию о его фононном спектре. И наоборот, существующие данные о фононном спектре кристалла облегчают построение его фоновой теплоемкости. Специфика сегнетоэлектрических кристаллов состоит в том, что, как правило, в их фононном спектре наиболее активными оказываются одна или несколько полярных оптических мод. Это обстоятельство можно использовать как при построении решеточной теплоемкости по данным о фононном спектре кристалла, так и при конструировании необходимых для обработки эксперимента интерполяционных схем.

В настоящем докладе представлен сравнительный обзор различных методов построения фоновой теплоемкости, применявшихся на протяжении более двух последних десятилетий в лаборатории сегнетоэлектричества кафедры общей физики и физики конденсированного состояния физического факультета МГУ при анализе экспериментальных данных о теплоемкости сегнетоэлектрических кристаллов. Приведены результаты построения фоновой теплоемкости для кристаллов дигидрофосфата калия (KDP) [1], борогерманата лантана (LBGO) [2–4], молибдатов гадолиния (GMO) [5] и тербия (TMO) [6], триглицинсульфата (ТГС) [7], титаната бария (BTO) [8], магнониобата свинца (PMN) и твердого раствора $Pb(In_{0.5}Nb_{0.5})O_3$-$Pb(Mg_{1/3}Nb_{2/3})O_3$-$PbTiO_3$ (PIN-PMN-PT) [9].

Литература

1. И.В. Шнайдштейн, Б.А. Струков, Об аномалии теплоемкости в реальных кристаллах KH_2PO_4, ФТТ, **48**, *11*, 2022–2025 (2006).
2. Б.А. Струков, А. Онодера, Е.П. Рагула, С.Ю. Стефанович, И.В. Шнайдштейн, С.В. Архангельская, Сегнетоэлектрический фазовый переход в кристаллах $LaBSiO_5$ по данным тепловых и диэлектрических измерений, ФТТ, **40**, 7, 1310–1312 (1998).
3. B.A. Strukov, Y. Uesu, A. Onodera, S.N. Gorshkov, I.V. Shnaidshtein, Effect of Nd^{3+} doping upon ferroelectric properties of $LaBGeO_5$ crystals, Ferroelectrics, **218**, 1–4, 249–255 (1998).
4. B. Strukov, A. Onodera, V. Lemanov, I. Shnaidshtein, S. Grabovsky, S. Davitadze, E. Milov, Calorimetry in Ferroelectricity: Trends and Some New Results, Ferroelectrics, **466**, 145–157 (2014).
5. I.V. Shnaidshtein, B.A. Strukov, A. Onodera, Comparative Study of Heat Properties of Rare Earth Molybdates, Journal of the Korean Physical Society, **32**, *Suppl*, S238–S240 (1998).
6. Б.А. Струков, А. Онодера, С.А. Тараскин, И.В. Шнайдштейн, Б.С. Редькин, Х. Хага, Теплоемкость кристалла β-$Tb_2(MoO_4)_3$ в области несобственного сегнетоэлектрического фазового перехода, ЖЭТФ, **108**, 1(7), 373–380 (1995).
7. Б.А. Струков, Е.П. Рагула, С.В. Архангельская, И.В. Шнайдштейн. О логарифмической особенности теплоемкости вблизи фазовых переходов в одноосных сегнетоэлектриках, ФТТ, **40**, 1, 106–108 (1998).
8. S.V. Grabovsky, I.V. Shnaidshtein, M. Takesada, A. Onodera, B.A. Strukov, Calorimetric study of ferroelectric $BaTiO_3$ in cubic phase, Journal of Advanced Dielectrics, **3**, 4, 1350032-1–1350032-5 (2013).
9. S. Grabovsky, I. Shnaidshtein, J. Przeslawski, Zhenrong Li, Zhuo Xu, B. Strukov, Specific heat of PIN-PMN-PT single crystal up to 500 K, в печати, (2017).

ОСОБЕННОСТИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МОНОКРИСТАЛЛОВ (K1−X(NH4)X)3H(SO4)2 (X=0.9, X=0.7)

в.н.с. *Гаврилова Н.Д.*, с.н.с. *Малышкина И.А.*, в.н.с. *Новик В.К.*
м.н.с. *Селезнева Е.В.*, в.н.с. *Макарова И.П.*
novikmp@orc.ru

Механизм суперионной проводимости обусловлен высокой подвижностью одного типа ионов в жесткой решетке, созданной ионами другого типа. Для реализации такого рода высокой подвижности необходимо выполнение одновременно нескольких условии. Во-первых, жесткая структура должна содержать заметно большее число вакантных позиций, чем ионов, которые могут их занимать. Во-вторых, позиции должны быть такими, чтобы энергия активации Ea между ними не слишком превышала kT. В-третьих, жесткий каркас должен формировать совокупность каналов проводимости, по которым должно осуществляться движение ионов в жестком каркасе. Что, в свою очередь, предполагает локализацию таких ионов в тех позициях, где они обладают высокой подвижностью.

В настоящее время вполне удовлетворительно разработаны физические принципы и найдены технологические решения для конструирования подобных материалов, обеспечивающие создание обеих совместимых компонент — жесткого канализирующего каркаса и подвижной «расплавленной» компоненты [1].

Наиболее интенсивно уже много лет изучаются кристаллы — суперпротоники, названные так по аналогии с суперрониками. Сравнительная простота выращивания монокристаллов из водных растворов, взаимосвязь изменений сеток водородных связей с физическими свойствами и относительно хорошо изученная протонная проводимость делают эти объекты привлекательными для исследований. Среди них укажем на ряд соединений, принадлежащих солевой системе $K_3H(SO_4)_2$–$(NH_4)_3H(SO_4)_2$–H_2O [2]. Соединения $K_3H(SO_4)_2$ и $(NH_4)_3H(SO_4)_2$, не являющиеся кристаллогидратами, известны как суперпротоники, которые при сходстве структуры обладают принципиально различной кинетикой фазового перехода, ответственного за разупорядочение водородных связей, собственно и создающего подвижную, протонную компоненту решетки [3].

Монокристаллы $K_3H(SO_4)_2$ имеют температуру фазового перехода ~ 460 K, близкую к температуре плавления монокристалла простого $KHSO_4$, с аномально высокими значениеми энтальпии и энтропии, также близкими к этим параметрам $KHSO_4$ [4]. Процесс фазового перехода характеризуется длительным временем релаксации кристалла, и его температура может быть точно определена только ступенчатым нагревом с длительной выдержкой.

Монокристалл $(NH_4)_3H(SO_4)_2$, как известно, является суперпротонным проводником выше 413K, и при понижении температуры испытывает ряд фазовых переходов при 265K, 143K, 135K и 65K, обусловленных изменением ориентационного упорядочения ионов NH_4^+ [5]. Фазовый переход в суперпротонную фазу в этом соединении происходит без каких-либо кинетических особенностей и завершается при достижении образцом термодинамически равновесного состояния выше 413 K. Достижение высокого значения проводимости ~10^{-1} $S \cdot cm^{-1} \cdot K$ на образце $K_9H_7(SO_4)_8 \cdot H_2O$ [6] и стремление объяснить принципиальные различия в кинетике фазовых переходов изоструктурных соединений $K_3H(SO_4)_2$ и $(NH_4)_3H(SO_4)_2$ привело к задаче изучить систему их твердых растворов [3]. Предполагалось проследить также сохранение температур фазовых переходов в составе с преобладанием аммониевой группы.

Нами исследовались составы $(K_{1}\square x(NH_4)x)_3H(SO_4)_2$ при значениях x = 0,9 и 0,7. Выращенные монокристаллы, относящиеся к пространственной группе симметрии $R\overline{3}$, представляли собой прозрачные пластины толщиной ≈ 0,1 мм и площадью ≈ 0,5 см2. На пластины наносились электроды из серебряной пасты для исследования совокупности диэлектрических свойств. Измерения проводились широкополосным диэлектрическим спектрометром “Novocontrol Concept 40” в интервале частот $10^{-1} \div 10^{7}$ Гц и температур –50÷50°C. Полученный массив экспериментальных данных содержит зависимости ε′(logf,T), ε″(logf,T), tgδ(logf,T), σ(logf,T), который достаточно полно характеризует особенности данной системы и развернуто излагается в докладе.

Одна из таких особенностей, не обсуждавшаяся ранее, находит свое проявление в существенной зависимости диэлектрического отклика от амплитуды измерительного поля.

Данные рис. 1 и 2 позволяют указать некоторые закономерности такого необычного поведения диэлектрика в сравнительно слабых полях и попытаться установить их физический механизм.

Кривые на рис. 2 иллюстрируют нелинейную связь между прило- женным полем и индуцируемым им дипольным моментом. Модуль дипольного момента с зарядами ±q и вектором $\vec{l}$ равен $|\vec{p}| = q|\vec{l}|$, где расстояние между зарядами можно принять $|\vec{l}| \propto Ea$. При выполнении a = 1, как легко нетрудно, диэлектрическая проницаемость не должна зависеть от величины приложенного измерительного поля.

В случае a > 1 диэлектрическая проницаемость должна возрастать при увеличении измерительного поля. Такой факт можно объяснить относительным ослаблением восстанавливающей силы (упругости связи) с увеличением смещения $|\vec{l}|$.

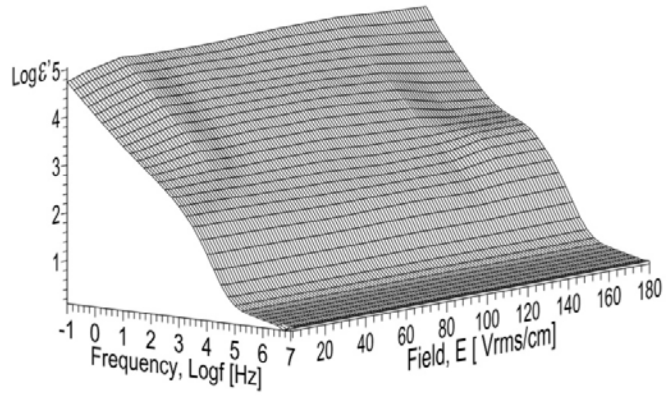


Рис.1 Зависимость Logε′(logf,E) образца монокристалла $(K_{0.3}(NH_4)_{0.7})_3H(SO_4)_2$ при T≈23°С. Немонотонность рельефа наглядно видна во всем поле координат даже в логарифмическом масштабе

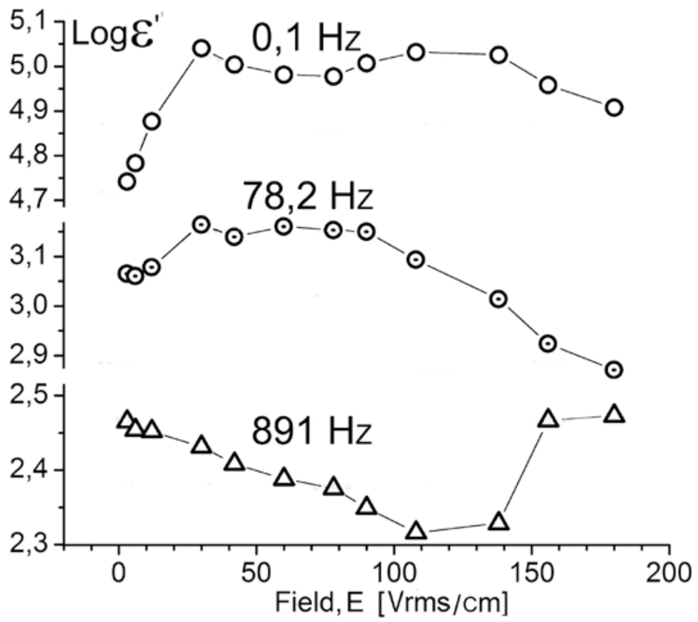


Рис. 2. Частотные сечения зависимости Logε′(logf,E)

Напротив, выполнение a < 1 указывает на относительное усиление по мере увеличения смещения $|\vec{l}|$ восстанавливающей силы (упругой связи), что должно приводить к снижению значения диэлектрической проницаемости с возрастанием амплитуды E.

Кривые рис. 2 показывают, однако, и саму зависимость выполнения перечисленных механизмов от частоты и амплитуды E.

Применительно к низкочастотной кривой (0,1 Гц) это означает, что в интервале $E = 3\div30$ В·см$^{-1}$ a > 1, а для E > 30 В·см$^{-1}$ a ≈ 1. Кривая наглядно свидетельствует о переключении механизма диэлектрической проницаемости при E=30 В·см$^{-1}$. При повышении частоты (78,2 Гц) для $E = 3\div30$ В·см$^{-1}$ a > 1, для $E = 30\div100$ В·см$^{-1}$ a ≈ 1, для $E = 100\div180$ В·см$^{-1}$ a <1, т.е. механизм диэлектрической проницаемости переключается дважды в общем направлении ужесточения упругой связи. На частоте еще более высокой (891 Гц) сразу же наблюдается феномен падения диэлектрической проницаемости, для $E = 3\div110$ В·см$^{-1}$ a < 1, с инверсией последующего изменения в направлении возрастания – для $E = 140\div180$ В·см$^{-1}$ a > 1.

Наличие четко выраженных точек переключения механизмов диэлектрической проницаемости в сравнительно слабых полях представляется самой принципиальной, среди наблюдавшихся особенностей. Она могла бы найти объяснение в рамках формирования механизма отрицательной диэлектрической проницаемости (см. [7] и наш доклад на этой конференции). Но такая модель требует обоснованного указания «массивного» элемента структуры [3], слабо связанного с жестким каркасом.

Дальнейшие исследования должны дать объяснение этому, сколь известно авторам, ранее не наблюдавшемуся явлению. При анализе необходимо исходить из своеобразия объекта — сегнетоэластика с перестраиваемой системой водородных связей.

Литература

1. Нефедова Д.С., Николаева Е.В., Поплавной А.С., Федорова Т.П. // Вестник КемГУ, 2013, т. 3, № 3 (55), с. 22–30.
2. Е. В. Дмитричева, И. П. Макарова, В. В. Гребенев, В. В. Долбинина, И. А. Верин, Р. Читра, Р. Р. Чудхари // Кристаллография, 2014, т. 59, № 6, с. 966–972.
3. Е. В. Дмитричева, И. П. Макарова, В. В. Гребенев//Кристаллография, 2015, т. 60, № 6, с. 880–886.
4. A.I. Baranov, V.V. Grebenev, U. Bismaer, J. Ludwig // Ferroelectrics, 2008, v. 369, p. 108–116.
5. Л.С. Смирнов, А.И. Баранов, Л.А. Шувалов, Л. Бобрович-Сарга, И. Натканец, С. Ваплак // ФТТ, 2001, т. 43, вып. 1, стр. 115–123.
6. E.V. Dmitricheva, I.P. Makarova, V.V. Grebenev, V.V. Dolbinina, I.A. Verin // Solid State Ionics, 2014, v. 268, p. 68–75.
7. N.D. Gavrilova, I.A. Malyshkina, V.K. Novik, A.V. Vorobiev// Journal of Non-Crystalline Solids, v. 452, pp. 1–8.

Подсекция:

БИОЛОГИЧЕСКАЯ
И МЕДИЦИНСКАЯ ФИЗИКА

Сопредседатели
Академик В. Я. Панченко, профессор В. А. Твердислов,
профессор Л. В. Яковенко

ПРОТИВОВИРУСНЫЕ И АНТИМИКРОБНЫЕ СВОЙСТВА НАНОЧАСТИЦ ПОРИСТОГО КРЕМНИЯ

С. н.с. *Осминкина Л.А.*, асп. *Шевченко С.Н.*

Введение

В последнее время много научных лабораторий во всем мире изучают вопрос применения нанотехнологий для борьбы с вирусными и бактериальными заболеваниями. Важной характеристикой клинических штаммов бактерий является их устойчивость к основным видам антибиотиков, которые назначают при лечении бактериальных инфекций.

В последнее время многие ученые сосредоточены на разработке новых методов для подавления микробиологических инфекций. Наиболее распространенным направлением в настоящее время являются методы с применением нанотехнологий.Показано, например, что наночастицы золота, в сочетании со специальными антителами вируса, работают как сопряженная система восстановления молекул, что может быть быстрым методом для борьбы с инфекцией дыхательных путей.Серебряные и медные наночастицы, иммобилизованные на нанонитях кремния, продемонстрировали антибактериальную активность в отношении грамотрицательных бактерий E. coli: 86% и 94% бактерий были уничтожены (для Cu и Ag соответственно). Однако, недостатки приведенных методов связаны с известной токсичностью наночастиц металлов. Например, наночастицы серебра, введенные в клетки млекопитающих,вызывают изменение нормальной функции митохондрий, увеличение проницаемости мембран и генерацию активных форм кислорода.

Получение и характеризация кремниевых наночастиц

Кремниевые наночастицы (SiNPs) были получены путем измельчения кремниевых нанонитей (SiNWs)или пленок пористого кремния в УЗ-ванне. Для получения SiNWs был применен двухступенчатый MACE метод. Пленки пористого кремния получались электрохимическим травлением c-Si. Для получения наночастиц покрытых полисахаридом (DSiNPs)кремниевые наночастицы смешивались с декстраном (1:1) и помещались в ультразвуковую ванну на 30минут.После помола суспензии центрифугировались в течение 1 минуты в центрифуге Eppendorf на скорости 6000 об./мин. В дальнейших экспериментах использовался супернатант раствора наночастиц, при этом плохо измельчённые частицы выпадали в осадок и не использовались.

Структура кремниевых наночатиц изучалась на сканирующем электронном (СЭМ) и просвечивающем электронном микроскопах (ПЭМ). По данным ПЭМ и СЭМ можно сделать вывод, что образцы SiNPs обладают пористой структурой и размерами 100нм.

Взаимодействие кремниевых наночастиц с бактериями

В своем исследовании [1] мы сообщаем о способе подавления жизнеспособности бактерий Escherichiacoli (E. coli) с помощью терапевтического ультразвукового облучения (USI) с использованием биосовместимых наночастиц кремния в качестве кавитационных сенсибилизаторов. Использовались кремниевые наночастицы без (SiNPs) и с полисахаридным (декстран) покрытием (DSiNPs). Было обнаружено, что одновременная обработка бактерий наночастицами и USI интенсивностью 1 Вт/см^2 привели к снижениюинфекционной способностиE. coliдо 35 и 72% для SiNPs иDSiNPs, соответственно (рис. 1 a). Наибольшее снижение жизнеспособности бактерий при использованииDSiNPs по сравнению с SiNPs можно объяснить тем фактом, что биополимерная оболочка полисахарида обеспечивает адгезию наночастиц к поверхности бактерий. Исследования ПЭМ показали, что бактериальная липидная оболочка была частично перфорирована после комбинированной обработки DSiNPs и USI 1 Вт/см^2, что может быть объяснено лизисом бактериальной мембраны из-за кавитации, сенсибилизированной SiNP (рис. 1c). Кроме того, было достигнуто 100% ингибирование E. coliпри совместном воздействииDSiNPs и USI с повышенной интенсивностью до 3 Вт / см^2 (рис. 1 b).

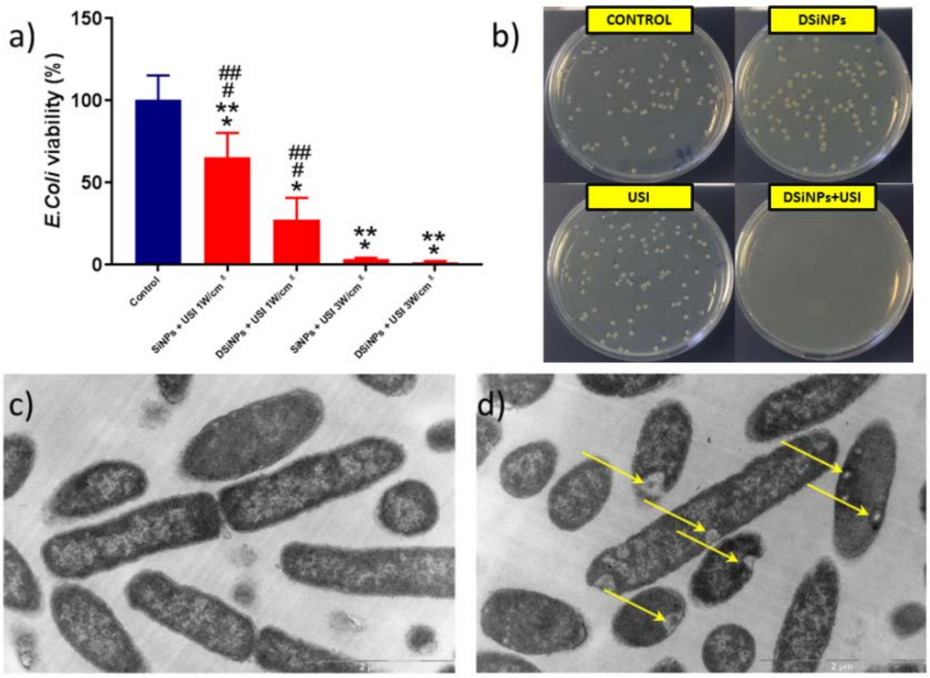


Рис. 1. a Результаты биологических экспериментов по воздействию SiNPs и USI на бактерии; b Чашка Петри, визуально демонстрирующая губительное воздействие SiNPs и USI 3 Вт/см^2 на бактерии; c,dПЭМ бактерий E.Coli до и после обработкиSiNPs и USI 1 Вт/см^2.

Взаимодействие кремниевых наночастиц с вирусами

Исследования показали сильное снижение вирусной активности вируса гриппа А (гриппа), полиовируса (PV1), вируса гепатита А (HAV), вируса Западного Нила (WNV) и вируса иммунодефицита человека (ВИЧ) [2] при их взаимодействии с SiNPs концентрации ниже 1 мг/мл. Подтверждение связывания проводили несколькими способами: с помощью ПЭМ, динамического рассеяния света (DLS) и при проведении биологических in-vitro экспериментов (рис. 2). Результаты, исследований объясняются неспецифическим связыванием SiNPs и вирусов, обусловленным Ван-дер-Ваальсовым взаимодействием вирионов с пористой поверхностью наночастиц.

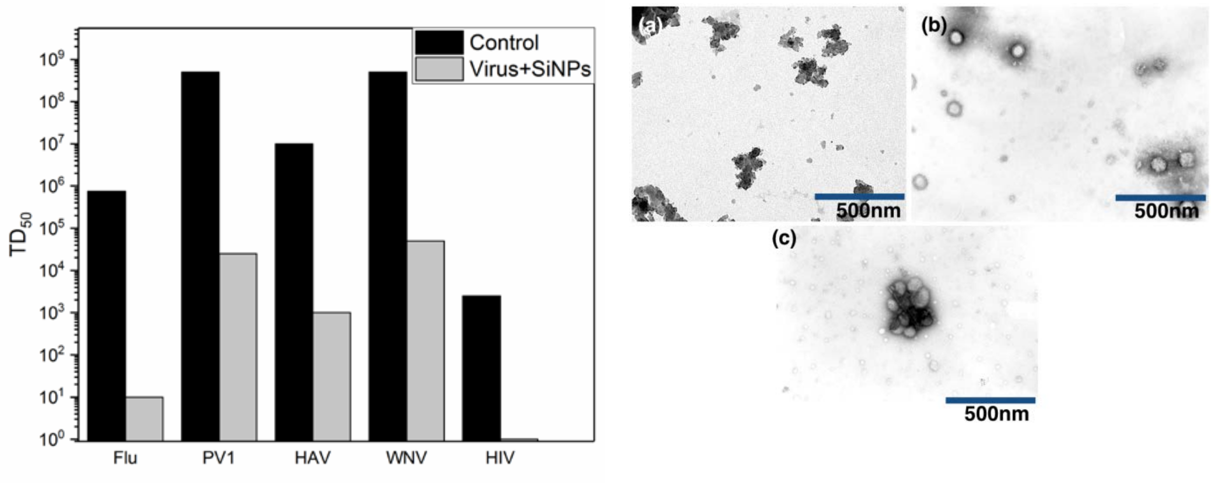


Рис. 2. Слева — результаты биологических экспериментов по ингибированию вирусной активности с помощью SiNPs; справа — визуальная демонстрация (ПЭМ) связывания SiNPs и вируса гриппа (a- SiNPs, b- вирионы, c- SiNPs+вирионы).

Заключение

Наблюдаемые результаты показывают перспективу применения биосовместимых SiNPs в качестве противомикробных агентов. Например, SiNP могут использоваться для очистки воды, питательных растворов, крови и других биологически важных жидкостей.

Литература

1. S. N. Shevchenko, M. Burkhardt, E. V. Sheval, U. A. Natashina, Osminkina L.A., and et al «Antimicrobial Effect of Biocompatible Silicon Nanoparticles Activated Using Therapeutic Ultrasound»// Langmuir. – 2017. – 10.1021.
2. Osminkina L.A., Timoshenko V.Yu , Shilovsky I.P. , Kornilaeva G.V., Shevchenko S.N., and et al. "Porous silicon nanoparticles as scavengers of hazardous viruses"// J Nanopart Res. - 2014. - 16:2430.

ПРИРОДНЫЕ АНТИОКСИДАНТЫ И СЕРДЦЕ

Проф. *Рууге Э.К.*, асп. *Дудылина А.Л.*, с. н. с. *Иванова М.В.*, с. н. с. *Шумаев К.Б.*

Полифенолы (включая флавоноиды), повсеместно присутствующие в овощах и фруктах, традиционно охарактеризуются исследователями как действенные природные антиоксиданты. Такое заключение сделано благодаря имеющимся многочисленным экспериментальным данным, четко демонстрирующим способность множества природных полифенольных соединений эффективно реагировать с активными формами кислорода и метаболитами оксида азота. Проведено огромное количество исследований, посвященных выяснению механизмов биологической активности различных по строению и структуре полифенольных соединений. Доказано участие полифенолов в важнейших внутриклеточных процессах, таких как модуляция путей биогенеза, регуляция активности компонентов дыхательной цепи и АТР синтазы митохондрий, инициирование апоптоза. Полифенолы способны защитить клетки сердечной мышцы и сосудистой стенки от последствий окислительного стресса и действия токсичных веществ, таких как многие противоопухолевые антибиотики, а также замедлить патогенез ряда нейродегенеративных заболеваний, связанных с нарушением баланса между прооксидантными и антиоксидантными процессами в организме.

Как известно, вклад митохондрий в функции клеток сердечно-сосудистой системы значительно шире, чем только их роль в энергетическом метаболизме в качестве главного поставщика АТР. Митохондрии играют первостепенную роль в сигнальных и регуляторных событиях, являющихся ответом на многообразные физиологические и физико-химические воздействия на клетки. В настоящее время значительный интерес вызывают супероксидные анион-радикалы, образующиеся в комплексе III дыхательной цепи митохондрий и играющие регуляторную роль во внутриклеточных процессах, связанных с адаптацией клеток к условиям гипоксии.

В нашей работе рассмотрены современные представления о возможных последствиях патологического стресса, приводящего к нарушениям функции и структуры митохондрий сердца, охарактеризованы некоторые аспекты защитного действия природных полифенолов. Целью работы было изучение влияния флавоноидов (кверцетина и рутина) и других фенольных соединений (кофейной кислоты, кумаровой кислоты, куркумина и резвератрола) с различным химическим строением на функциональное состояние митохондрий сердца и взаимодействия указанных полифенолов с образуемыми в митохондриях супероксидными радикалами. Опыты проводили на изолированных митохондриях сердца крысы (линия Wistar), дыхательную активность митохондрий изучали с помощью полярографии, генерацию супероксидных радикалов — с помощью спектроскопии ЭПР спиновых ловушек.

Инкубация митохондрий с кверцетином, кофейной кислотой, кумаровой кислотой, резвератролом и рутином в концентрации от 1 мкМ до 1 мМ не влияла на скорость поглощения кислорода в состоянии 4 дыхательной цепи. Однако, при увеличении концентрации куркумина больше 100 мкМ скорость дыхания существенно снижалась. Сопряжение дыхания и фосфорилирования митохондрий не изменялось в присутствии кофейной кислоты, кумаровой кислоты и рутина в диапазоне от 1 мкМ до 1 мМ. Кверцетин и резвератрол не оказывали воздействия до 200 мкМ, однако при увеличении концентрации оба полифенола приводили к снижению дыхательного контроля. Действие куркумина не был линейным, при этом в диапазоне концентрации 10–100 мкМ наблюдалось максимальное снижение эффективности фосфорилирования.

Исследованные нами полифенольные соединения проявляли антиоксидантную активность, реагируя с генерируемыми митохондриями в присутствии сукцината и антимицина А супероксидными радикалами. При этом эффект зависел от структуры полифенола и его концентрации в среде инкубации. Кофейная кислота, кверцетин, куркумин и резвератрол результативно конкурировали за перехват супероксидных радикалов с высокочувствительной спиновой ловушкой TIRON (4,5-диоксибензол-1,3-дисульфонат натрия) в диапазоне концентрации 0,1-500 мкМ. В случае кумаровой кислоты или рутина значимое уменьшение сигнала ЭПР от TIRON наблюдалось при концентрациях полифенолов больше 1 мМ.

Полученные нами данные показывают, что равновесие между прооксидантными и антиоксидантными процессами в тканях сердечной мышцы и сосудов может зависеть от присутствия в клетках полифенольных соединений − природных антиоксидантов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 15-04-05211.

КРЕМНИЕВЫЕ НАНОЧАСТИЦЫ ДЛЯ ТЕРАНОСТИКИ ОНКОЛОГИИ

с.н.с. *Осминкина Л. А.*

В настоящее время все большее значение приобретают мультидисциплинарные исследования, которым и является настоящая работа. Здесь объединены химические методы получения наноструктур кремния, физические методы их изучения, физические же методы активации кремниевых наноструктур, изучение их биоактивных свойств. Целью настоящего цикла работ является разработка уникального материала а на основе наноструктурированного кремния для тераностики (*theranostics = therapy and diagnostics*) онкологических заболеваний.

В работе был разработан метод получения коллоидных растворов кремниевых наноструктур (SiNPs) с размерами около 100 нм, и имеющих пористую структуру [1–13]. Также были разработаны методы покрытия SiNPs биосовместимыми полисахаридами и полимерами [6, 9]. Были всесторонне (методы электронной микроскопии, инфракрасной спектроскопии, динамического рассеяния света, спектроскопии комбинационного рассеяния света, фотолюминесценции и проч.) изучены структурные и физико-химические свойства полученных наночастиц [1–13].

В работах впервые была предложена и доказана возможность использования получаемых SiNPs как сенсибилизаторов ультразвуковых волн терапевтических частот и мощностей. В частности, было впервые показано понижение порогов акустической кавитации в водных суспензиях в присутствие SiNPs, при облучении терапевтическим ультразвуком (УЗ) с частотами 0.88 MHz. В серии *in-vitro* и *in-vivo* экспериментов была доказана эффективность использования SiNPs как соносенсибилизаторов УЗ излучения для терапии рака [1, 5, 9, 10].

Впервые было обнаружено свойство коллоидных растворов SiNPs эффективно разогреваться под действием высокочастотного электромагнитного поля (*radio-frequency, RF*). Так, показано, что суспензии SiNPs (1 мг/мл) могут нагреваться в RF поле терапевтических частот и интенсивностей (27 МГц, 1–5 Вт/см^2) со скоростью порядка 10 К/мин, в то время как дистиллированная вода при тех же условиях практически не нагревалась. Для объяснения наблюдаемого сильного нагрева суспензий слабо проводящих SiNPs, была предложена модель, согласно которой наблюдаемый эффект объясняется возникновением локальных электрических токов вокруг наночастиц. В сериях биологических экспериментов in-vivo и in-vitro была доказана возможность использования данного эффекта разогрева SiNPs в электромагнитном RF поле для уничтожения раковых клеток [6, 8].

Недавно автором была предложена и доказана идея изучения биодеградации SiNPs методом комбинационного рассеяния света (Рамановская спектроскопия). При этом были проведены как модельные физические эксперименты, так и эксперименты с живыми клетками in-vitro, демонстрирующие полное растворение наночастиц кремния в биологических средах (диализ) и живых клетках в течение двух недель [2].

Были впервые разработаны покрытые термочувствительным полимером и заполненные лекарством (доксорубицином) SiNPs. В серии физических экспериментов было показано, что SiNPs эффективно нагреваются при воздействии на них лазерного или электромагнитного RF излучения. Это, в свою очередь, приводит к коллапсу полимерного слоя на их поверхности и высвобождению из пор наночастиц лекарства. Таким образом, свойства таких наночастиц-наноконтейнеров сенсибилизации гипертермических эффектов лазерного или электромагнитного RF излучения приводило в биологических экспериментах к синергетическому эффекту их токсического действия на раковые клетки [6].

Впервые была продемонстрирована возможность мультимодальной диагностики SiNPs в клетках in-vitro. Использовались четыре оптических метода визуализации наночастиц: люминесцентная спектроскопия высокого разрешения (HR-SIM), Рамановская микро-спектроскопия, двухфотонная люминесценция и Когерентная антистоксова Рамановская спектроскопия. Люминесцентная спектроскопия высокого разрешения позволяла диагностировать кремниевые наночастицы внутри клетки с разрешением вплоть до 100 нм. Рамановская микро-спектроскопия позволяла не только увидеть кремниевую наночастицу, но и проследить за ее биодеградацией прямо внутри клетки (см [6]). Когерентная антистоксова Рамановская спектроскопия (CARS) и двухфотонная люминесценция (TPEF) — нелинейные методы оптической диагностики. CARS позволял с высоким разрешением и главное очень быстро (в 100000 быстрее, чем обычная Рамановская микроспектроскопия) сканировать клетки и ткани. Отмечу также, что здесь снимается когерентный сигнал, который на несколько порядков сильнее, чем спонтанное Рамановское рассеяние, обеспечивая тем самым более высокую чувствительность данного метода. Основным преимуществом использования TPEF являлось повышение контрастности получаемого изображения за счет практически отсутствия фонового сигнала клеточной автофлуоресценции [3].

Таким образом, в представленном цикле работ представлены методы получения кремниевых наноструктур, в том числе методы их покрытия биополимерами и заполнения лекарством. Всесторонне изучены структурные и физические свойства наночастиц. Выявлены свойства полученных наночастиц сенсибилизации ультразвукового и электромагнитного радиочастотного излучения. Показаны возможности мультимодальной биовизуализации наночастиц. Также впервые физическим методом спектроскопии комбинационного рассеяния света доказана биодеградация наночастиц в живых клетках.

Результаты работы имеют огромное значение в перспективе создания лекарств на основе биосовместимых и биодеградируемых наночастиц кремния для тераностики онкологии.

Литература

1. Osminkina L. A., Timoshenko, V. Y. Porous Silicon as a Sensitizer for Biomedical Applications. Mesoporous Biomater.; 3:39–48. 2016. DOI: 10.1515/mesbi-2016-0005.

2. Tolstik, E., Osminkina, L. A., Matthäus, C., Burkhardt, M., Tsurikov, K. E., Natashina, U. A., Timoshenko V.Yu, Heintzmann R., Popp J., Sivakov, V. Studies of silicon nanoparticles uptake and biodegradation in cancer cells by Raman spectroscopy. Nanomedicine: Nanotechnology, Biology and Medicine. 12(7), 1931–1940. 2016. DOI: 10.1016/j.nano.2016.04.004.
3. Tolstik E., Osminkina L.A., Akimov D., Gongalsky M.B., Kudryavtsev A.A., Timoshenko V.Y., Heintzmann R., Sivakov V., Popp J. Linear and Non-Linear Optical Imaging of Cancer Cells with Silicon Nanoparticles. International Journal of Molecular Sciences, 17(9), 1536. 2016. DOI: 10.1038/srep24732.
4. Gongalsky M.B., Osminkina L.A., Pereira A., Manankov A. A., Fedorenko A.A., Vasiliev A. N., Solovyev V.V., Kudryavtsev A.A., Sentis M., Kabashin A.V., Timoshenko V.Y. Laser-synthesized oxide-passivated bright Si quantum dots for bioimaging. Scientific reports, 6. 2016. DOI: 10.1038/srep24732
5. Osminkina, L. A., Kudryavtsev, A. A., Zinovyev, S. V., Sviridov, A. P., Kargina, Y. V., Tamarov, K. P., Nikiforov V.N., Ivanov A.V., Vasilyev A.N., Timoshenko, V. Y. Silicon Nanoparticles as Amplifiers of the Ultrasonic Effect in Sonodynamic Therapy. Bulletin of experimental biology and medicine, 161(2), 296-299. 2016. DOI: 10.1007/s10517-016-3399-x.
6. Tamarov, K., Xu, W., Osminkina, L., Zinovyev, S., Soininen, P., Kudryavtsev, A., Gongalsky M., Gaydarova A., Närvänen A., Timoshenko V., Lehto, V. P. Temperature responsive porous silicon nanoparticles for cancer therapy–spatiotemporal triggering through infrared and radiofrequency electromagnetic heating. Journal of Controlled Release, 241, 220-228. 2016. DOI: 10.1016/j.jconrel.2016.09.028.
7. Gonchar, K. A., Zubairova, A. A., Schleusener, A., Osminkina, L. A. & Sivakov, V. Optical Properties of Silicon Nanowires Fabricated by Environment-Friendly Chemistry. Nanoscale Research Letters, 11(1), 357. 2016. DOI: 10.1186/s11671-016-1568-5.
8. Kabashin, A. V., Tamarov, K. P., Ryabchikov, Y. V., Osminkina, L. A., Zinovyev, S. V., Kargina, J. V., Ivanov, A. V., A.V., Nikiforov V.N., Kanavin A.P., Zavestovskaya I.N., Timoshenko V.Yu. Si nanoparticles as sensitizers for radio frequency-induced cancer hyperthermia. In SPIE LASE (pp. 97370A-97370A). International Society for Optics and Photonics. 2016. DOI: 10.1117/12.2222814.
9. Osminkina L. A., Nikolaev A. L., Sviridov A. P., Andronova N. V., Tamarov K. P., Gongalsky M. B., Kudryavtsev A.A., Treshalina H.M., Timoshenko V. Y. “Porous silicon nanoparticles as efficient sensitizers for sonodynamic therapy of cancer”. Microporous and Mesoporous Materials, 210, 169-175. 2015. DOI: 10.1016/j.micromeso.2015.02.037.
10. Sviridov A. P., Osminkina L. A., Nikolaev, A. L., Kudryavtsev A. A., Vasiliev A. N., Timoshenko V. Y. “Lowering of the cavitation threshold in aqueous suspensions of porous silicon nanoparticles for sonodynamic therapy applications”. Applied Physics Letters 107(12), 123107. 2015. DOI: 10.1063/1.4931728.

11. Rodichkina S. P., Osminkina L. A., Isaiev M., Pavlikov A. V., Zoteev A. V., Georgobiani V. A., Gonchar K.A., Vasiliev A.N. Timoshenko V. Y. “Raman diagnostics of photoinduced heating of silicon nanowires prepared by metal-assisted chemical etching”. Applied Physics B, 1-8. 2015. DOI: 10.1007/s00340-015-6233-7.
12. Georgobiani V. A., Gonchar K. A., Osminkina L. A., Timoshenko V. Y. “Structural and photoluminescent properties of nanowires formed by the metal-assisted chemical etching of monocrystalline silicon with different doping level”. Semiconductors 49(8), 1025-1029. 2015. DOI: 10.1134/S1063782615080084.
13. Gongalsky, M.B., Kargina, Y.V., Osminkina, L.A., Perepukhov, A.M., Gulyaev, M.V., Vasiliev, A.N., ... & Timoshenko, V.Y. Porous silicon nanoparticles as biocompatible contrast agents for magnetic resonance imaging. Applied Physics Letters, 107(23), 233702. 2015. DOI: 10.1063/1.4937731.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ПЕРСОНАЛЬНОГО ЭКВИВАЛЕНТА ДОЗЫ ФОТОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Доц. *А.В. Белоусов,* асп. *Г.А. Крусанов,* проф. *А.П. Черняев*

Для персонального мониторинга в условиях внешнего облучения используется величина, называемая эквивалентом дозы *H*. Эта величина определена как произведение поглощенной дозы *D* в данной точке на среднее значение фактора качества (называемого также коэффициентом качества) *Q* в данной точке:

$$H = D \cdot Q. \quad (1)$$

Среднее значение фактора качества определяется как:

$$Q = \frac{1}{D}\int_0^\infty Q(L) D_L(L) dL, \quad (2)$$

где $Q(L)$ представляет собой функцию полной линейной передачи энергии (ЛПЭ) L в воде, $D_L(L)dL$ — поглощенная в точке доза, обусловленная излучением с линейной передачей энергии в диапазоне $(L, L+dL)$. Зависимость фактора качества излучения от ЛПЭ вводится следующим образом:

$$Q(L) = \begin{cases} 1, L \le 10 \text{ кэВ/мкм} \\ 0.32L - 2{,}2{,}10 < L < 100 \text{ кэВ/мкм} \\ \frac{300}{\sqrt{L}}, L \ge 100 \text{ кэВ/мкм} \end{cases}. \quad (3)$$

Когда вычисление фактора качества по формуле (2) затруднительно, используется формула (3), аргументом которой является среднедозовое значение ЛПЭ:

$$\mathrm{L_D} = \frac{\sum_i L_i \Delta E_i}{\sum_i \Delta E_i}. \tag{4}$$

Целью работы является оценка энергетической зависимости фактора качества монохроматического фотонного излучения с учетом вторичных частиц методом компьютерного моделирования. Использован инструментарий Geant4, реализующий метод Монте-Карло. Представлены результаты расчетов для различных способов вычисления фактора качества: с использованием зависимости фактора качества от ЛПЭ, вычисленной на каждом шаге взаимодействия частиц (рис. 1); через среднедозовое значение ЛПЭ (рис. 2). Вычисления проводились для трех рекомендованных глубин расположения чувствительного слоя: 0.07 мм, 3 мм и 10 мм. Как видно из графиков, фактор качества, рассчитанный по среднедозовому значению ЛПЭ, может представлять собой заниженное значение. Для более точного сравнения необходимы дальнейшие ресурсоемкие вычисления.

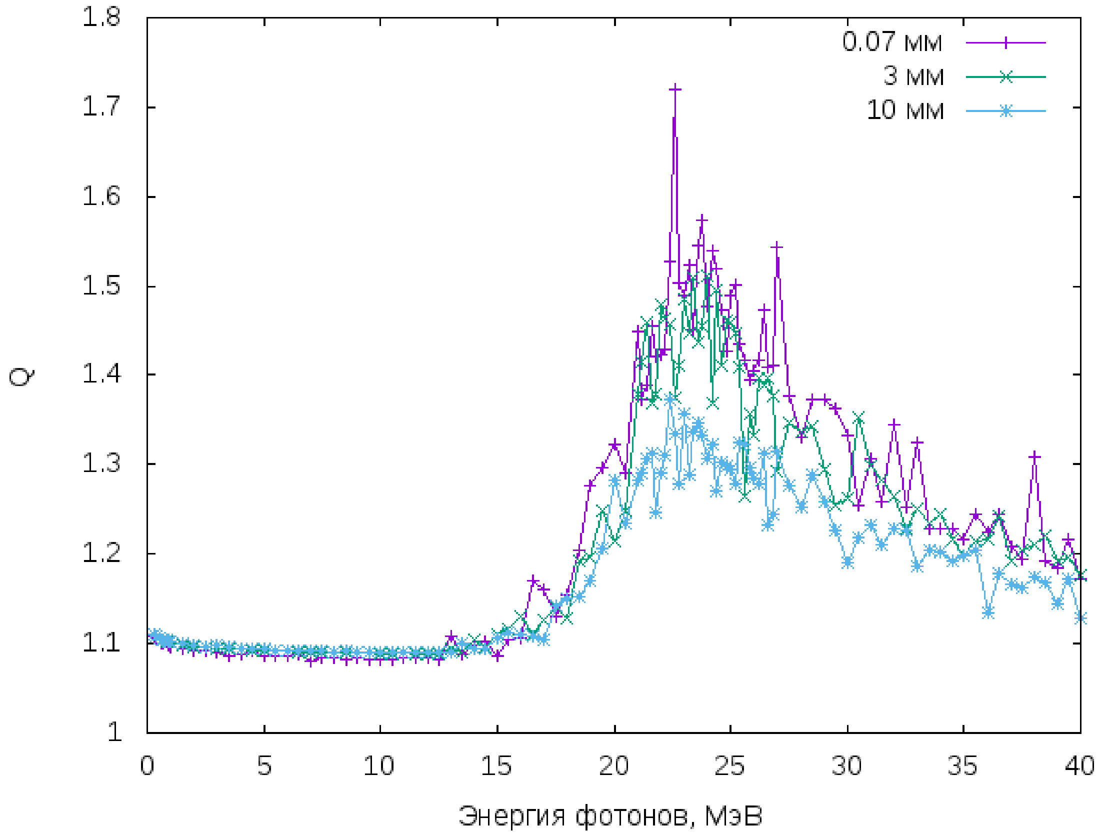


Рис. 1. Зависимость фактора качества от энергии фотонов с использованием ЛПЭ, вычисленной на каждом шаге.

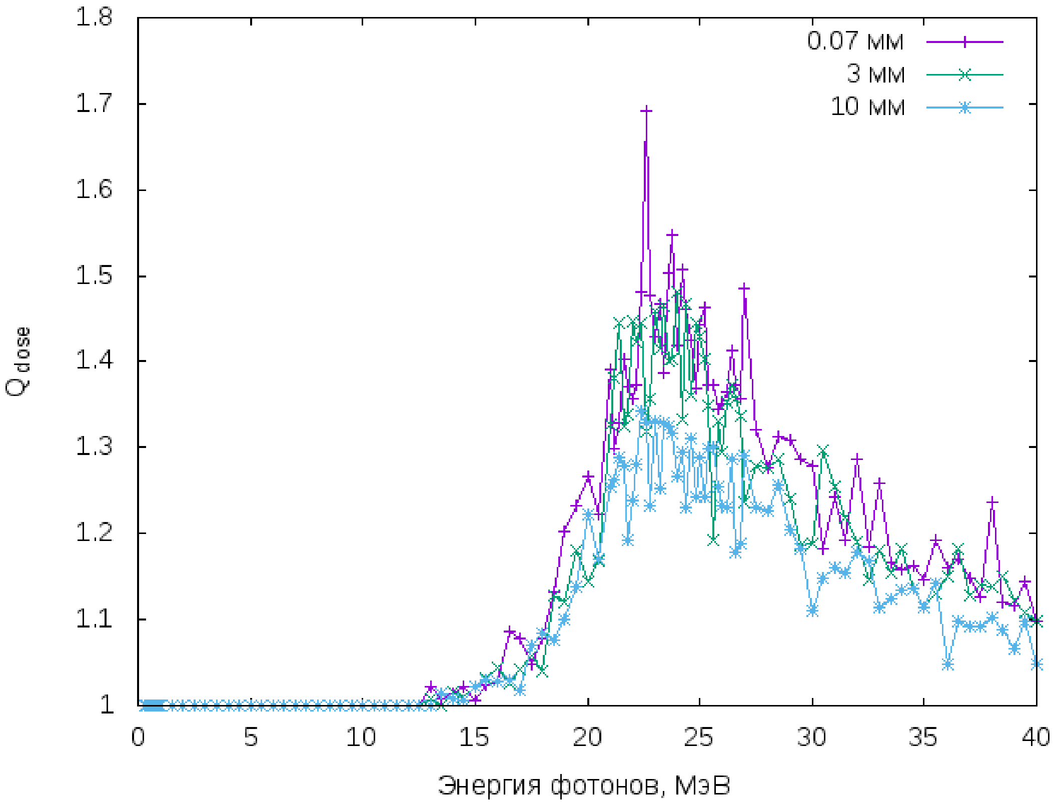


Рис. 2. Зависимость фактора качества от энергии фотонов с использованием среднедозового значения ЛПЭ.

Литература

1. ICRP, 2007. The 2007 Recommendations of the International Commission on Radiological Protection. ICRP Publication 103. Ann. ICRP 37 (2–4).

ВОЗДЕЙСТВИЕ РЕНТГЕНОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА КИНЕТИКУ ПРОРАСТАНИЯ КЛУБНЕЙ КАРТОФЕЛЯ

Авдюхина В.М., Близнюк У.А., Борщеговская П.Ю., Бусленко А.В., Еланский С.Н., Илюшин А.С., Кондратьева Е.Г., Левин И.С., Синицын А.П., студ. *Студеникин Ф.Р.,* проф.*Черняев А.П.*

В России в среднем собирается примерно 35 млн. тонн картофеля в год. При этом возникает необходимость в длительном хранении картофеля до следующего урожая. Одной из основных проблем хранения картофеля является его прорастание, в результате которого картофель теряет влагу и питательные вещества. В сельском хозяйстве применяются высокие дозы химических пестицидов для подавления прорастания клубней при хранении. Однако, пестициды, применяемые для обработки продукции во время хранения, накапливаются в клубнях. Возникает необходимость в применении альтернативных методов контроля прорастания картофеля.

Облучение картофеля ионизирующим излучением является эффективным методом подавления прорастания клубней.

Целью данной работы является экспериментальное исследование воздействия рентгеновского излучения на прорастание клубней картофеля в различные периоды его хранения, а также поиск минимальной дозы облучения, необходимой как для остановки, так и для частичного замедления прорастания клубней.

В качестве объекта исследования были выбраны клубни картофеля сорта «Жуковский ранний» урожая 2016 года в количестве 100 кг, выращенные на базе Всероссийского научно-исследовательского института картофельного хозяйства им. А.Г. Лорха и собранные 20 августа 2016 года. Эксперимент проходил в четыре этапа. На этапе 1 было произвольным образом отобрано 198 клубней, которые облучались рентгеновским излучением спустя два месяца после сбора. На этапе 2 176 клубней подвергли воздействию рентгеновского излучения через три месяца хранения. Этап 3 облучения проходил спустя четыре месяца хранения (154 клубня), этап 4 — через пять месяцев после сбора урожая (132 клубня).

Клубни картофеля облучали рентгеновским излучением, источником которого являлся источник питания ПУР5/50 с рентгеновской трубкой БСВ-23 с молибденовым анодом. Ток трубки во всех экспериментах составлял 20 мА, напряжение — 50 кВ, рабочая мощность трубки составляла 1 кВт. Облучение проходило с четырех окон одновременно. Эксперименты и дальнейшее хранение картофеля происходили при температуре 13–15^{o}С. Каждый клубень располагали на расстоянии 11 см от окна рентгеновской трубки. Время облучения варьировалось от 4 до 60 минут, при этом все клубни облучались половину времени с одной стороны, затем их переворачивали и облучали с другой стороны для достижения равномерного облучения.

Для оценки поглощенной дозы в картофеле проводилось моделирование с использованием программного кода GEANT4. В результате моделирования было получено, что мощность поглощенный дозы в картофеле средней массой 120 г составляла примерно 0,01 Гр/с.

Для контроля качества облученных клубней для всех четырех этапов облучения в них ежемесячно измерялась концентрация восстанавливающих сахаров колориметрическим методом с ДНС-реактивом. Затем полученные данные сравнивались с концентрацией сахаров в контрольных необлученных образцах. Для этого из каждого клубня выделяли экстракт, который затем разбавляли в 20 раз с дистиллированной водой. Затем в пропорции 1:1,5 в пробы с экстрактом добавляли смесь реагента динитросалициловой кислоты и инкубировали на кипящей водяной бане в течение

5 минут. Пробы охлаждали до комнатной температуры и измеряли оптическую плотность на спектрофотометре при длине волны 540 нм как превышение оптической плотности пробы с экстрактом над оптической плотностью фонового раствора реагента. Из полученных данных рассчитывали концентрации восстанавливающих сахаров в г/л и строили графики зависимости концентрации восстанавливающих сахаров от дозы облучения для каждого этапа.

Для исследования кинетики прорастания картофеля измеряли длину проростков облученных и контрольных клубней. По полученным значениям строились зависимости средней суммарной длины проростков от дозы облучения. Рассчитывалась средняя суммарная длина на один клубень и измерялась в различные периоды после проведения облучения для каждого этапа.

На рис. 1 представлены зависимости, измеренные через полгода после сбора урожая, т.е. в феврале 2017 года, для суммарной длины проростков, нормированных на количество клубней, от дозы облучения для всех четырех этапов обработки рентгеновским излучением. Как видно из рис. 1, с увеличением дозы облучения суммарная длина проростков, приходящаяся на один клубень, уменьшалась, причем дозовые зависимости носят нелинейный характер. Для клубней картофеля, облученных через 2, 3 и 4 месяца хранения (этап 1–3), остановка прорастания происходила в дозах от 15 до 20 Гр и более. Для клубней, облученных через 5 месяцев после сбора урожая (этап 4), ингибирование прорастания наступало при дозах от 10 Гр и более. Также видно, что в среднем длина проростков клубней, облученных на четвертом этапе, ниже для всех доз облучения, чем для первых трех этапов. Это может быть связано с тем, что к январю треть всех наблюдаемых клубней проросла, а оставшиеся клубни должны были прорости в скором времени (к февралю 2017 года практически все контрольные клубни проросли). При этом для облучения отбирались не пророщенные клубни. Таким образом, клубни на грани прорастания больше подвержены воздействию ионизирующего излучения по сравнению с клубнями, прорастание которых должно было произойти через 1–3 месяца.

На рис. 2 представлено изменение концентраций восстанавливающих сахаров от времени хранения картофеля в контрольных необлученных клубнях с октября 2016 года по март 2017 года. Как видно из рис. 2, в течение первых трех месяцев наблюдения концентрация сахаров практически не менялась и составляла менее 2 г/л, затем наблюдался резкое увеличение количества сахаров через пять месяцев после сбора урожая, т.е. в январе, до 14 г/л, затем их последующее уменьшение в феврале и марте. Такое возрастание, а затем резкий спад концентраций восстанавливающих сахаров в контрольных клубнях непосредственно связано с их активным прорастанием с конца января по конец февраля 2017 года.

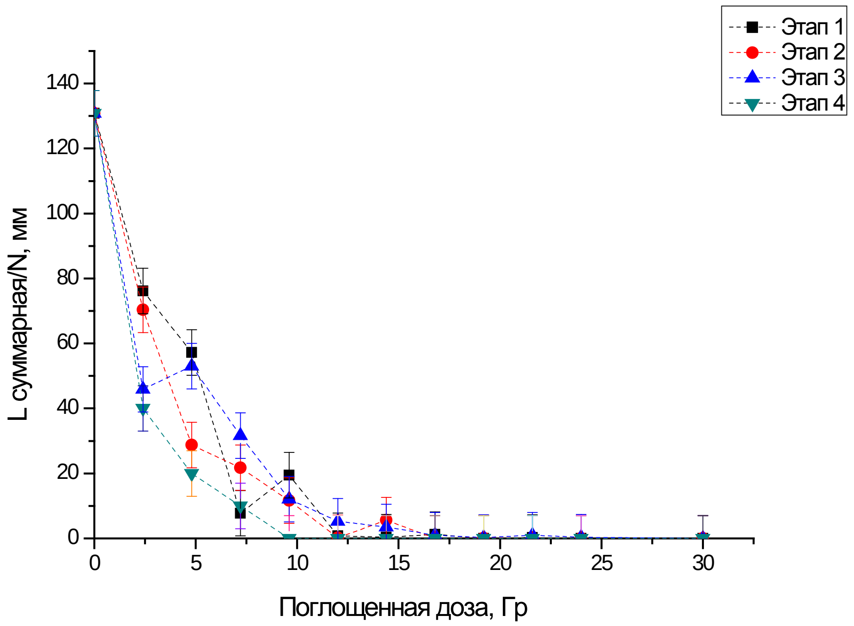


Рис. 1. Зависимости, измеренные через полгода после сбора урожая, для суммарной длины проростков, нормированных на количество клубней, от дозы облучения для всех четырех этапов обработки рентгеновским излучением.

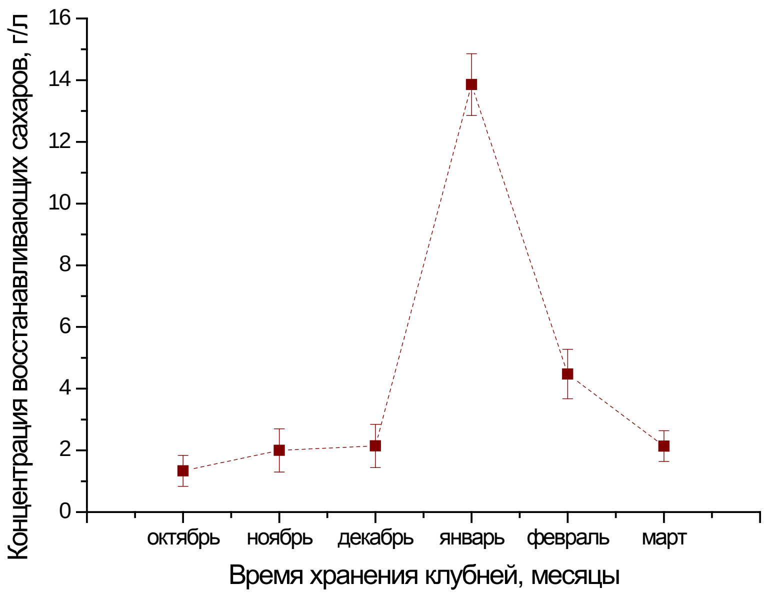


Рис. 2. Изменение концентраций восстанавливающих сахаров в контрольных необлученных клубнях от времени хранения (месяцы).

На рис. 3 представлены зависимости концентраций восстанавливающих сахаров в облученных клубнях от поглощенной дозы для всех этапов воздействия рентгеновским излучением, измеренные через семь месяцев после сбора урожая, т.е. в марте 2017 года.

Как видно из рис. 3, концентрации восстанавливающих сахаров в облученных в различных дозах клубнях через семь месяцев хранения практически не отличалась от концентрации сахаров в контрольных образцах. Наблюдалось некоторое возрастание концентраций восстанавливающих сахаров через месяц после воздействия рентгеновского излучения. Однако в дальнейшем количество сахаров в облученных в различных дозах клубнях практически всегда было ниже либо близко к соответствующим контрольным значениям.

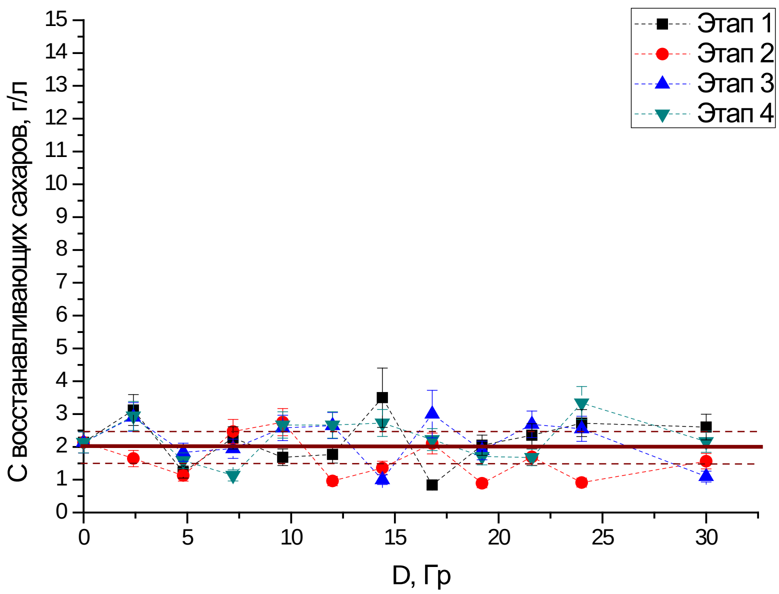


Рис. 3. Зависимости концентраций восстанавливающих сахаров в облученных на различных этапах хранения клубнях от поглощенной дозы, жирная линия — концентрация сахаров в контрольных образцах в марте 2017 года.

В ходе проведенных экспериментов показано, что воздействие рентгеновского излучения на клубни картофеля, облученные в октябре, ноябре и декабре, приводят к полной остановке их прорастания в дозах от 15–20 Гр и более в течение времени наблюдения. Для клубней, облученных в январе, ингибирование прорастания наблюдается в дозах от 10 Гр и более. Концентрация восстанавливающих сахаров в контрольных образцах урожая августа 2016 года практически не менялась до декабря 2016 года, затем наблюдался резкий скачок концентрации сахаров в январе и дальнейший спад в феврале 2017 года. После воздействия рентгеновского излучения наблюдаются флуктуации концентраций восстанавливающих сахаров в клубнях картофеля, облученных в различных дозах, причем максимум флуктуаций наблюдался через месяц после каждого облучения. К марту 2017 года концентрация восстанавливающих сахаров клубней, облученных в различных дозах, была меньше или равна концентрации сахаров в контрольных образцах.

ИССЛЕДОВАНИЕ МАГНИТНЫХ СВОЙСТВА НАНОЧАСТИЦ КРЕМНИЯ ДЛЯ ЭФФЕКТИВНОГО КОНТРАСТИРОВАНИЯ В МЕТОДЕ МАГНИТНОЙ РЕЗОНАНСНОЙ ТОМОГРАФИИ

н.с. *Гонгальский М.Б.*, асп. *Каргина Ю.В.*, с.н.с. *Осминкина Л.А.*, н.с. *Перепухов А.М.*, н.с. *Гуляев М.В.*, проф. *Пирогов Ю.А.* проф. *Максимычев А.В.*, проф. *Тимошенко В.Ю.*

Наночастицы сегодня привлекают внимание ученых всего мира. Нанометровые размеры дают им возможность проникать в клетки, что позволяет использовать наночастицы для терапии и диагностики различных заболеваний, включая онкологические. К наиболее перспективным относятся кремниевые наночастицы (SiNPs). Они являются биосовместимыми, т. е. обладают низкой токсичностью, а, в итоге, они растворяются (биодеградируют) и продукты их растворения выводятся из организма [1, 2]. SiNPs можно использовать для разработки новых эффективных методов терапии раковых заболеваний [3, 4, 5]. Методы терапии могут быть совмещены с диагностическими, такой подход называют «тераностикой». Данная работа посвящена контрастным агентов на основе пористого кремния в методе магнитно-резонансной томографии (МРТ).

МРТ — один из ключевых методов визуализации организма человека, позволяющий исследовать любые органы. Однако, в ряде случаев для улучшения качества изображений необходимо использовать контрастирующие средства. Сегодня для этого используют контрастные агенты на основе гадолиния и оксида железа. К их недостаткам можно отнести существенную токсичными [6,7]. SiNPs выгодно отличает высокая биосовместимость, поэтому ожидается, что контрасты на их основе будут безопаснее для применений in vivo.

Изображения, получаемые с помощью МРТ, строятся на основе измерения магнитных характеристик тканей, главные из которых — время спин-решеточной (T1) и спин-спиновой (T2) релаксации намагниченности протонов. В данной работе установлено укорочение времен релаксации намагниченности протонов воды вблизи нанокристаллов кремния диаметром порядка 200 нм с большой концентрацией электронных спиновых состояний (10^{15}–10^{17} $г^{-1}$)вследствие эффектов взаимодействия с магнитными моментами наночастиц кремния. T1 падает с 4000 мс для воды до 2450 мс для суспензий SiNPs, T2 с 2700 мс до 240 мс соответственно. Экспериментальное наблюдение таких эффектов открывает путь к использованию SiNPs в качестве безопасных контрастных агентов для магнитно-резонансной томографии. В работе показано, что концентрация парамагнитных дефектов на поверхности наночастиц коррелирует с их релаксивностью (эффективностью укорочения времен релаксации). Поэтому, несмотря на то, что на данный момент релаксивность кремниевых наночастиц уступает гадолинию и оксидам железа, ожидается, что дальнейшее увеличение концентрации дефектов приведет к росту релаксивности и откроет перспективы использования наночастиц в условиях in vivo.

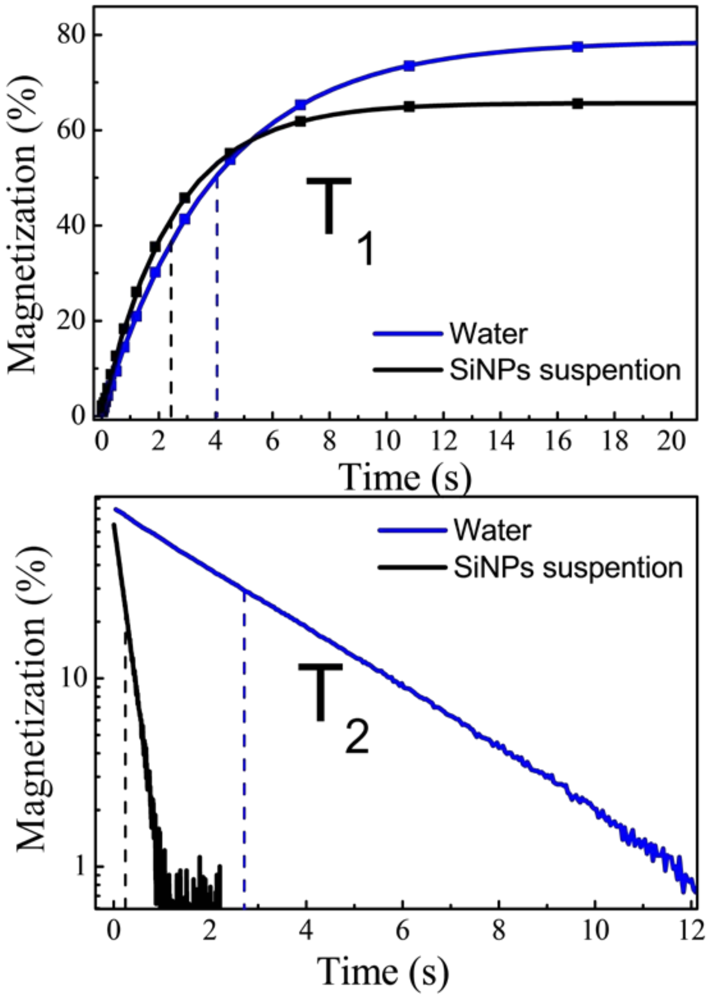


Рис. 1. Релаксационные зависимости продольной (верхний график) и поперeченой (нижний график) намагниченности протонов в дистиллированное воде (синие кривые) и суспензиях наночастиц кремния (1 г/л).

Литература

1. S. Park et al., Mater. Chem. B, 3, 198206 (2015).
2. A.D Durnev et al.,Int. J. Biomed. Nanosci. Nanotechnol., 1,70 (2010).
3. L.A. Osminkina ey al.,. Appl. Phys. B Lasers Opt., 105, 665668 (2011).
4. K.P. Tamarov et al., Sci. Rep., 4, 7034 (2014).
5. A.P. Sviridov et al., Appl. Phys. Lett.,103, 193110 (2013).
6. T. Grobner et al., Nephrol. Dial. Transplant, 21, 11041108 (2006).
7. M. Mahmoudi, Chem. Rev., 112, 23232338 (2012).

Подсекция:

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Сопредседатели
профессор В. Ч. Жуковский, профессор Б. И. Садовников

КВАНТОВАНИЕ СВЕТОВЫХ КОЛЕЦ УЛУЧШЕННЫМ МЕТОДОМ ВКБ

Проф. *Гальцов Д.В.*, магистр. *Богуш И.А.*, асп. *Денли Х.*

Квазинормальные моды (КНМ) черных дыр (ЧД) описывают релаксацию пространства-времени на внешние возмущения [1, 2]. Они представляют собой решения волнового уравнения с эффективным потенциалом, удовлетворяющие граничным условиям поглощения на горизонте и расходящихся волн на бесконечности. При этом соответствующий волновой оператор не является самосопряженным, и собственные частоты комплексны. Спектр КНМ керровской ЧД зависит от ее массы и углового момента, что использовалось LIGO для нахождения параметров ЧД, образовавшейся в результате слияния двойной системы [3, 4].

Для нахождения спектра КНМ как правило использовался метод ВКБ с точностью до высших порядков, при этом задача аналогична квантованию в «перевернутом» потенциале. Между тем, такой расчет определяется видом эффективного потенциала вблизи его максимума, и он слабо чувствителен к наличию или отсутствию горизонта событий, куда прошедшая волна затем уходит. Если вместо ЧД имеется кротовая нора (КН), то продолжение волнового поля внутрь объекта может стать иным, поэтому получаемый методом ВКБ спектр частот не всегда имеет отношение и истинному спектру КНМ. Поскольку вершина барьера в волновом уравнении совпадает с радиусом неустойчивой круговой фотонной орбиты или "светового кольца" (СК), вычисление методом ВКБ скорее следует понимать как «квантование» световых колец (СКМ). В опытах типа LIGO именно такие СКМ ответственны за "звон" (ringdown) на последней фазе слияния, в то время как истинные КНМ определяют последующее затухание хвостов возмущений, но соответствующий сигнал уже становится малым и не обнаруживается. Таким образом, именно СКМ представляют основной интерес для гравитационно-волновой астрономии.

Интересно рассмотреть поведение СКМ при переходе от ЧД к КН, на примере метрики, зависящей от массы m, параметра НУТ n и заряда q, которая интерполирует между ЧД и КН в зависимости от соотношения между параметрами [5]:

$$ds^2 = -f(dt - 2n(\cos\theta)d\varphi)^2 + f^{-1}dr^2 + (r^2 + n^2)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

где

$$f = \frac{r^2 - 2mr + q^2 - n^2}{r^2 + n^2}$$

Эффективный потенциал в волновом уравнении (для простоты рассматривается скалярный случай) имеет вид:

$$V_{wave} = f(\frac{l(l+1) - 4n^2\omega^2}{r^2 + n^2} + 2\frac{mr + n^2 - q^2}{r^4}).$$

При больших значениях орбитального числа он переходит в радиальный потенциал геодезических в максимуме которого находятся СК. Был построен алгоритм вычисления спектра СКМ до высоких порядков метода ВКБ, основываясь на подходе, предложенном в [6, 7]. Главная идея метода заключается в том, что дифференциальное уравнение второго порядка, подобное уравнению Шредингера, приводится к линейной системе дифференциальных уравнений первого порядка. Далее, используется свойство аналитичности решений в комплексной плоскости для получения точной формулы их сшивки. Метод приводит к простым алгебраическим условиям квантования для различных задач с двумя и более точками поворота [7], что позволяет построить сходящиеся приближения высших порядков в терминах дифференцирования и интегрирования

$$\frac{d^2\psi(z)}{dz^2} + Q^2(z)\psi(z) = 0 \qquad 1)$$

Уравнение (1) можно решить точно, зная функцию $q(z)$, удовлетворяющей условию:

$$Q^2 - q^2 + q^{1/2} \cdot \left(q^{-1/2}\right)'' = 0$$

Это уравнение можно разрешить относительно q итеративно, считая третье слагаемое пропорциональным малой величине ε. В данной работе предлагается алгоритм итеративного построения функции q и последующего нахождения решения для задачи собственных значений QNM, что позволяет находить высшие поправки с помощью программных пакетов символьной алгебры. На основе алгоритмов были получены аналитические выражения для первых 9-ти поправок к q и собственные значения для квазинормальных мод с точностью до 10-го порядка приближения ВКБ. Ниже приведены первые три поправки к q и выражение для собственных значений квазинормальных мод с точностью до 4-го порядка ввиду длины выражений для поправок более высокого порядка.

$$q = Q + q_1 + q_2 + q_3 + \cdots$$

$$q_1 = \frac{A_0}{2Q^{1/2}}, \qquad q_2 = -\frac{A_1}{8Q^{-1/2}}, \qquad q_3 = \frac{Q^3(2A_2 + 3B_0) - A_0^3}{64Q^{7/2}}$$

$$A_0 = \left(Q^{-1/2}\right)'', \qquad A_1 = \left(\frac{A_0}{Q^2}\right)'', \qquad A_2 = \left(\frac{A_1}{Q^2}\right)'', \qquad B_0 = \left(\frac{A_0^2}{Q^{7/2}}\right)''$$

$$v_0 = \Lambda_0 + \Lambda_2 + \Lambda_4 + \cdots$$

$$\Lambda_0 = -i\alpha\sqrt{2v_2}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_2 = {} & \frac{1}{288v_2^2}\left(-(7+60\alpha^2)v_3^2 + 9(1+4\alpha^2)v_2v_4\right) \\ & - \frac{i\alpha}{6912\sqrt{2}v_2^{9/2}}\Big(5(77+188\alpha^2)v_3^4 - 18(51+100\alpha^2)v_2v_3^2v_4 + 24(19+28\alpha^2)v_2^2v_3v_5 \\ & + 3v_2^2\big((67+68\alpha^2)v_4^2 - 8(5+4\alpha^2)v_2v_6\big)\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_4 = {} & \frac{1}{597196800v_2^7}\Big(25(101479+1672440\alpha^2+1852080\alpha^4)v_3^6 - 225(43939+639960\alpha^2+620400\alpha^4)v_2v_3^4v_4 \\ & + 360(14777+190920\alpha^2+156240\alpha^4)v_2^2v_3^3v_5 \\ & + 225v_2^2v_3^2\big((40261+496104\alpha^2+399120\alpha^4)v_4^2 - 8(1211+13656\alpha^2+8688\alpha^4)v_2v_6\big) \\ & + 3240v_2^3v_3\left(-\big(1889+40\alpha^2(489+322\alpha^2)\big)v_4v_5 + 20(11+104\alpha^2+48\alpha^4)v_2v_7\right) \\ & + 81v_2^3\Big(-25(513+4552\alpha^2+2000\alpha^4)v_4^3 + 200(63+472\alpha^2+176\alpha^4)v_2v_4v_6 \\ & + 8v_2\big((1107+8680\alpha^2+5040\alpha^4)v_5^2 - 25(9+56\alpha^2+16\alpha^4)v_2v_8\big)\Big)\Big) \\ & + \frac{i\alpha}{28665446400\sqrt{2}v_2^{19/2}}\Big(175(6163969+29447880\alpha^2+18261456\alpha^4)v_3^8 \\ & - 300(17858183+77242680\alpha^2+43539888\alpha^4)v_2v_3^6v_4 \\ & + 720(3845261+15006520\alpha^2+7489104\alpha^4)v_2^2v_3^5v_5 \\ & + 90v_2^2v_3^4(25(3533345+13561928\alpha^2+6809040\alpha^4)v_4^2 \\ & - 8(1595083+5512840\alpha^2+2303280\alpha^4)v_2v_6) \\ & + 4320v_2^3v_3^3\left(-5(290285+987960\alpha^2+435792\alpha^4)v_4v_5 + 8\big(11491+120\alpha^2(289+98\alpha^2)\big)v_2v_7\right) \\ & + 432v_2^4v_3(v_5(25(223883+627720\alpha^2+228144\alpha^4)v_4^2 \\ & - 8(145417+354120\alpha^2+110544\alpha^4)v_2v_6) - 240(3559+8600\alpha^2+2352\alpha^4)v_2v_4v_7) \\ & + 27v_2^4\Big(25(305141+713320\alpha^2+171024\alpha^4)v_4^4 - 80(117281+236440\alpha^2+50064\alpha^4)v_2v_4^2v_6 \\ & + 64v_2^2\big((19277+33160\alpha^2+6288\alpha^4)v_6^2 + 36(1049+2040\alpha^2+528\alpha^4)v_5v_7\big) \\ & + 576v_2v_4\left(-\big(21577+56\alpha^2(895+294\alpha^2)\big)v_5^2 + 15(167+280\alpha^2+48\alpha^4)v_2v_8\right)\Big) \\ & + 540v_2^3v_3^2\Big(-25(260619+852184\alpha^2+361200\alpha^4)v_4^3 \\ & + 24(138533+402040\alpha^2+142800\alpha^4)v_2v_4v_6 \\ & + 16v_2(4(31617+93520\alpha^2+36624\alpha^4)v_5^2 - (12679+31960\alpha^2+8496\alpha^4)v_2v_8)\Big)\Big)\end{aligned}$$

где v_i — i-ая производная функции Q^2 в точке её экстремума, $\alpha = n + 1/2$, $n = 0, 1, 2, \dots$ — квантовое число. Результат первых двух слагаемых совпадает с выражениями из [7]. Применение этих формул к задаче о ЧД/КН будет описано в более подробной публикации.

Работа выполнялась при поддержке РФФИ, проект №17-02-01299.

Литература

1. C. V. Vishveshwara, Nature (London) 227, 936 (1970).
2. R.A. Konoplya and A. Zhidenko, Rev. Mod. Phys. 83, 793 (2011).

3. https:/www.advancedligo.mit.sdu/nov_2015_news.html
4. B.P. Abbott et al. Phys. Rev. Lett. 116, 061102.
5. G. Clement, D. Gal'tsov and M. Guenoush, Phys. Rev. D 93, 024048 (2016).
6. N. Froman, P. O. Froman, JWKB Approximation (Amsterdam: North-Holland, 1965).
7. D. V. Gal'tsov, A. A. Matiukhin, Class. Quantum Grav. 9 (1992) 2039–2055.

ГАММА МЕТРИКИ С ПАРАМЕТРОМ НЬЮМЕНА-УНТИ-ТАМБУРИНО

Проф. *Гальцов Д. В.*, магистр. *Кобялко К.В.*

Радиоинтерферометрия со сверхдлинными базами сделала возможными наблюдения за центром Галактики с угловым разрешением, достаточным для четкого определения тени от центрального объекта, который предположительно является керровской черной дырой. В связи с этим усилился интерес к поиску альтернативных моделей компактных объектов, отличных от предсказываемых стандартной теорией черных дыр, в которой метрика Керра является уникальной. Основные предположения, которые приводят к последнему предсказанию, это принцип космической цензуры, запрещающий существование так называемых голых сингулярностей, не скрытых горизонтом событий, а также принцип защиты хронологии, запрещающий области пространства-времени вне горизонта, в которых присутствуют замкнутые времени-подобные кривые (ЗВК). Хотя оба предположения и являются наиболее аргументированными, все же абсолютно исключить возможность их нарушения нельзя. Соответствующие решения уравнений Эйнштейна известны давно, но они, как правило, считаются нефизическими. Однако недавно было показано, что решения с параметром НУТ (Ньюман-Унти-Тамбурино), которые формально и содержат области с ЗВК, не допускают свободного движения вдоль таких кривых, а содержащиеся в них голые сингулярности в виде струн Мизнера (МС) проницаемы для геодезических [1]. Более сильные голые сингулярности присутствуют в так называемых гамма-метриках, представляющих собой аксиально-симметричную деформацию черной дыры Шварцшильда [2]. В последнем случае движение тел в их окрестности может быть хаотическим [3], что также представляет феноменологически интересную альтернативу случаю стандартной черной дыры. В данной работе рассматривается комбинированная гамма-метрика с параметром НУТ. Подобные решения недавно были получены [4–5], но их свойства пока не были изучены. В нашей работе проведено разностороннее исследование данной метрики в различных координатных системах включая сферические, сфероидальные, координаты Кодамы-Хикиды [2] и Вейля. В простейшее форме, в сфероидальных координатах решение имеет следующий вид:

$$ds^2 = -f(dt - \omega d\phi)^2 + \Sigma^2\left(\frac{dx^2}{x^2-1} + \frac{dy^2}{1-y^2}\right) + R^2 d\phi^2, \qquad (1)$$

где введены обозначения:

$$R^2 = L^2 f^{-1}(x^2-1)(1-y^2), \qquad \Sigma^2 = L^2 f^{-1}\left(\frac{x^2-1}{x^2-y^2}\right)^{\delta^2}(x^2-y^2), \qquad (2)$$

$$f = \frac{a}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\delta} + \gamma^2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\delta}}, \qquad \omega = 2Ny + C, \qquad N = 2\gamma\delta L / a.$$

Изучено поведение инвариантов кривизны, вычислены локальные геометрические характеристики сингулярностей и областей содержащих ЗВК, в зависимости от величины параметра деформации δ. При $|\delta| \geq 2$ исследуемая система состоит из двух "чёрных дыр" ($x = 1, y = \pm 1$) соединенных сингулярной подпоркой ($x = 1, |y| < 1$), при этом нами обнаружено улучшение поведения инвариантов кривизны и возникновение новых вырожденных зеркальных горизонтов Киллинга ($x = -1, y = \pm 1$), отсутствовавших в гамма метрике без НУТ заряда. Старые и зеркальные горизонты при этом оказываются лежащими на полярной оси, из них выходят струны Мизнера.

Применение некоторых трансформаций интегралов Комара с использованием потенциалов Эрнста, принадлежащих Томимацу [6], позволило вычислить области локализации и распределение масс, моментов и НУТ зарядов источников:

$$M_I = \delta L \qquad M_{G\pm} = \frac{a\gamma}{4(1+\gamma^2)}(2N \pm C)$$

$$J_I = \frac{2\delta - 1}{2} CL \qquad J_{G^\pm} = \mp\frac{1}{4}(2N \pm C)(z - L) - \frac{a\gamma}{8(1+\gamma^2)}(2N \pm C)^2$$

где I — сингулярная подпорка, $G_\pm$- струны Мизнера. При этом полная масса решения конечна, а струна Мизнера обладает конечной линейной плотностью момента. Однако в случае НУТ заряда, исследуемая ситуация не вполне однозначна, так как ряд соображений указывает на чисто топологическую природу дуального заряда, как характеристического класса расслоения [7].

Выявлены достаточные условия существования регулярного продолжения метрики, изучены свойства получаемого расширенного пространства. Для построения гладкого расширения при значениях параметров деформации $\delta = \pm 2, \pm 3$ и $|\delta| > 4$ нами вводится дополнительное топологическое условие регуляризации — компактификация временной координаты. Вычислена площадь горизонта и величина поверхностной гравитации.

На основе существования двух изометрий построен и исследован двумерный эффективный потенциал движения.

$$V_{eff}(x,y)=\frac{1}{2}e^{-2\gamma}\left(-E^2-\varepsilon f+\frac{f^2\hat{l}^2}{L^2(x^2-1)(1-y^2)}\right) \qquad (5)$$

Проведён анализ круговых геодезических, описаны области их существования и устойчивость в рамках теории возмущений. Доказано существование круговых экваториальных геодезических в асимптотическом пределе. Классифицированы и описаны кривые нулевых скоростей - поверхности точек поворота геодезических. Реализовано численное исследование сечений Пуанкаре (рис. 1), выявлены очаги локализации хаоса и доказана неинтегрируемость соответствующей динамической системы.

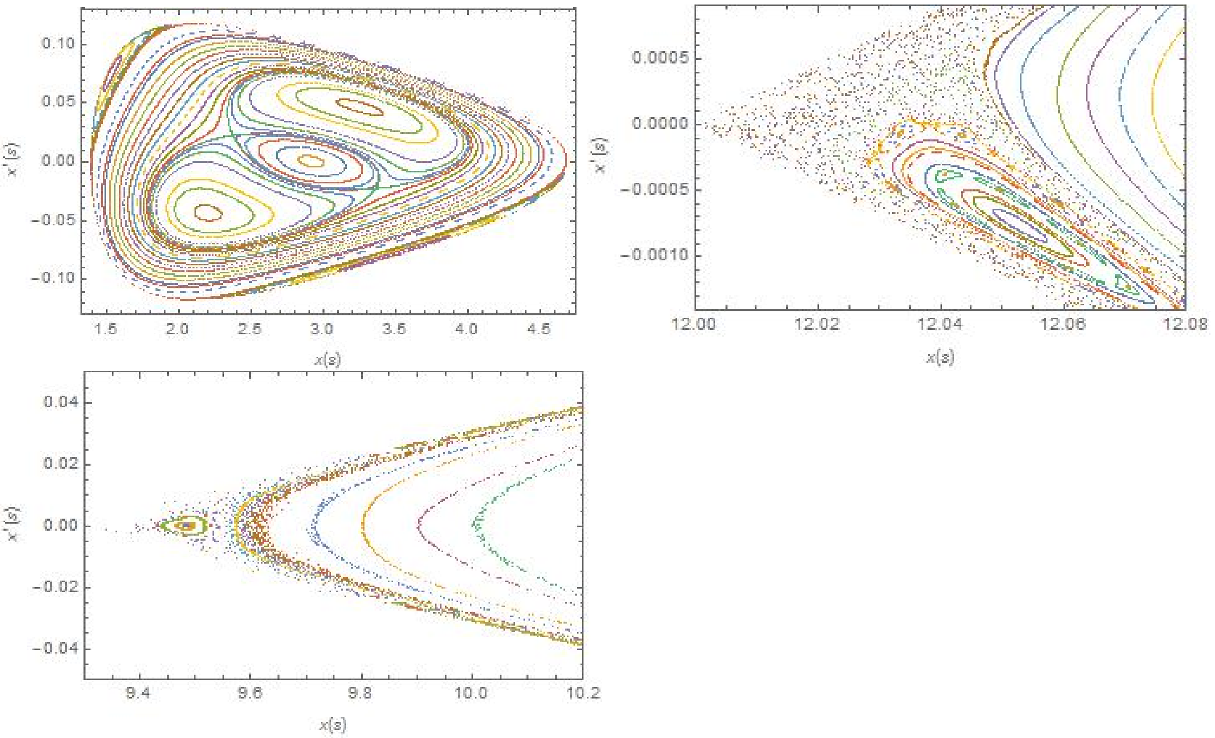


Рис. 1. Примеры сечений Пуанкаре для геодезических в гамма метрике с НУТ зарядом.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 17-02-01299а

Литература

1. G. Cl´ement, D. Gal'tsov and M. Guenouche, //Phys. Lett. B 750 (2015) 591 [arXiv:1508.07622[hep-th]]; Phys. Rev. D 93 (2016) 024048 [arXiv:1509.07854[hep-th]].

2. H. Kodama, W. Hikida. Global structure of the Zipoy-Voorhees-Weyl spacetime and the δ = 2 Tomimatsu-Sato spacetime. // Classical and Quantum Gravity. –2003. – Vol. 20, – P. 5121. – arXiv:gr-qc/0304064.
3. G. Lukes-Gerakopoulos. The non-integrability of the Zipoy-Voorhees metric. // Phys.Rev. D. – 2012. – Vol. 86. – arXiv:1206.0660.
4. I. G. Contopoulos, F. P. Esposito, K. Kleidis, D. B. Papadopoulos, and L. Witten Generating Solutions to the Einstein Field Equations. // International J. of Modern Physics D, – 2016. – Vol. 25, – Issue 2. – arXiv:1508.01764.
5. B. Chung, R. Mann and C. Stelea, Accelerating Taub-NUT and Eguchi-Hanson solitons in four dimensions. // Phys. Rev. D. – 2006. – Vol. 74.
6. A. Tomimatsu. On Gravitational Mass and Momentum of Two Black Holes in Equilibrium. // Progress of Theoretical Phys. 1983. Vol. 70. P. 385–393.
7. G. Bossard, H. Nicolai, K.S. Stelle. Gravitational multi-NUT solitons, Komar masses and charges. // General Relativity and Gravitation. – 2009, – Vol. 41, – Issue 6, – P. 1367–1379.

МЕТОДЫ УСКОРЕННОЙ СХОДИМОСТИ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Проф. *Николаев П.Н.*

Для решения задач статистической физики приходится использовать ряды теории возмущений. При этом расчет каждого последующего члена такого ряда сопряжен с большими математическими сложностями. Кроме того, получаемые ряды для многих наиболее интересных физических областей (например, экстремальных состояний вещества) сходятся очень медленно.

По этой причине возникает задача об ускорении сходимости ряда, то есть его преобразования в другой ряд, который имел бы такую же сумму, как и исходный, но сходился быстрее [1–5]. Несмотря на большие достижения в расчете вириальных коэффициентов, число их весьма ограничено, и этим определяется актуальность использования методов ускоренной сходимости.

Для системы твердых сфер в настоящее время число известных вириальных коэффициентов равно одиннадцати, а для системы с потенциалом взаимодействия Леннард-Джонса — восьми, причем за последние пятьдесят лет точность вычисления этих вириальных коэффициентов значительно возросла [6, 7].

Для более сложных потенциалов взаимодействия число известных вириальных коэффициентов еще меньше. В этой связи применение методов ускоренной сходимости рядов теории возмущений является совершенно необходимым условием при использовании вириальных рядов, либо более сложных вариантов рядов теории возмущений, при описании состояния вещества при высоких плотностях и высоких давлениях.

Имеющиеся методы ускоренной сходимости рядов теории возмущений в статистической термодинамике можно разделить на три группы. В первую очередь это математические методы ускоренной сходимости. Они основаны на чисто математических свойствах рядов, которые либо известны изначально, либо наличие которых предполагается. К математическим методам ускоренной сходимости относятся метод Куммера, метод Эйлера, метод аппроксимант Паде и целый ряд других, успешно используемых для решения целого ряда задач [2].

Существо физических методов ускоренной сходимости заключается в том, что, исходя из физических соображений, мы переходим от функций, ряды теории возмущений для которых сходятся медленно, к функциям, для которых ряды теории возмущений сходятся быстрее. В статистической термодинамике основная задача состоит в вычислении статистического интеграла. Для реальных потенциалов взаимодействия его свойства во многом помогают определить те функции, ряды теории возмущений для которых сходятся быстрее. Эти свойства находятся на основе асимптотического анализа поведения статистического интеграла.

Для ускорения сходимости рядов теории возмущений, исходя из физических соображений, следует учитывать также размерность пространства. Надо использовать представление о числе ближайших соседей, поведение системы при больших плотностях, включая метастабильную область и область упорядоченной фазы, особенности поведения различных термодинамических функций [8–10]. Важную роль здесь играет и выбор основного приближения. Достаточно точное уравнение состояния системы твердых сфер необходимо и в случае неравновесных процессов для вычисления коэффициентов переноса для плотных газов в рамках теории Больцмана-Энскога.

Более общими являются комбинированные методы ускоренной сходимости рядов теории возмущений. В рамках данного подхода на основе физических соображений осуществляется переход к функциям, ряды теории возмущений для которых сходятся достаточно быстро, а уже для них применяются математические методы ускорения сходимости.

В данной работе получение уравнения Карнахана-Старлинга, описывающего уравнение состояния твердых сфер с хорошей степенью точности, сведено к использованию метода Эйлера ускоренной сходимости ряда, полученного на основе ряда по степеням плотности для свободной энергии. Этот ряд обладает тем свойством, что его коэффициенты слабо отличаются друг от друга. Грубо говоря, ряд ведет себя подобно геометрической прогрессии. Однократное применение метода Эйлера к данному ряду при учете только второго вириального коэффициента (и при использовании информации об известных вириальных коэффициентах) позволяет получить уравнение Карнахана-Старлинга.

Последующий учет всех известных вириальных коэффициентов позволяет найти уравнение состояния, описывающее стабильную фазу с точностью современного машинного эксперимента. Метастабильная фаза описывается также достаточно хорошо. Для улучшения совпадения теории и эксперимента в метастабильной области произведен учет асимптотики выражения для свободной энергии системы. То есть для получения окончательного результата мы используем комбинированный метод ускоренной сходимости. В результате получено полное согласие теоретических данных и данных машинного эксперимента.

Система твердых сфер является базовой при построении статистической термодинамики реальных систем, особенно для областей большой плотности, фазовых переходов и метастабильных областей. Полученное с высокой степенью точности уравнение состояния для системы твердых сфер позволяет описывать эти сложные области фазовой диаграммы и находить для них новые интересные особенности, имеющие существенный практический интерес.

Предлагаемый подход допускает очевидное обобщение на многокомпонентные системы, системы с многогочастичным взаимодействием, квантовые системы.

Литература

1. *Ефимов А.В.* Математический анализ (специальные разделы). Ч. 1. М., Высшая школа, 1980.
2. *Hamming R.W.* Numerical methods for scientists and engineers. New York, 1987.
3. *Николаев П.Н.* // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2017. № 1.
4. Kunz K.S. Numerical analysis. New York, 1957.
5. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. Киев, 1969.
6. *Wheatley R.J.* // Phys. Rev. Lett. 2013. **110**. 200601.
7. *Zhang C., Pettitt B.M.* // Mol. Phys. 2014. **112**. P. 1427.
8. *Bannerman M.N., Lue L., Woodcock L.V.* //J. Chem. Phys. 2010. **132**. 084507.
9. *Woodcock L.V.* Nature. 1997. **385**. P. 141.
10. *Wang L., Xu N.* // Phys. Rev. Lett. 2014. **112**. 055701.

УЧЁТ CP-НАРУШЕНИЯ ПРИ СМЕШИВАНИИ НЕЙТРИНО В ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ

В.н.с. *К.В.Жуковский*, студ. *Е.А.Веселова*

Стандартная модель электрослабых взаимодействий в настоящее время включает нейтрино с массовыми состояниями $\boldsymbol{\nu_1}$, $\boldsymbol{\nu_2}$, $\boldsymbol{\nu_3}$, соответствующими флейворным состояниям $\boldsymbol{\nu_e}$, $\boldsymbol{\nu_\mu}$, $\boldsymbol{\nu_\tau}$. Конечная масса означает наличие осцилляций нейтрино: распространяясь, нейтрино меняют свой флейвор, что было экспериментально определено при смешиванию солнечных, атмосферных, и реакторных нейтрино. Соответствующий переход из базиса массовых состояний в базис флейворных состояний и обратно происходит по аналогии с матрицей смешивания для кварков Кабиббо–Кобаяши–Маскава (СКМ). Флейворные состояния нейтрино $\boldsymbol{\nu_e}$, $\boldsymbol{\nu_\mu}$, $\boldsymbol{\nu_\tau}$, представляют собой линейную комбинацию массовых состояний $\boldsymbol{\nu_1}$, $\boldsymbol{\nu_2}$, $\boldsymbol{\nu_3}$; этот переход описывается унитарной матрицей смешивания $\mathbf{U}_{\mathrm{PMNS}}$ Понтекорво–Маки–Накагавы–Саката (PMNS):

$$\left|\nu_\alpha\right\rangle = \sum_{i=1,2,3}\mathbf{U}^*_{\mathrm{PMNS}\ \alpha i}\left|\nu_i\right\rangle,\ \mathbf{U}_{\mathrm{PMNS}\ \alpha i} \equiv \left\langle\nu_\alpha\middle|\nu_i\right\rangle,\ \alpha = e,\mu,\tau,\ i = 1,2,3,\ \mathbf{U}_{\mathrm{PMNS}} = \mathbf{U}_{\mathrm{st}}\mathbf{P}_{Mjr}, \quad (1)$$

$$\mathbf{U}_{\mathrm{st}} = \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{\nu_\alpha} \\ \boldsymbol{\nu_\mu} \\ \boldsymbol{\nu_\tau} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \quad\boldsymbol{\nu_1} & \qquad\qquad\boldsymbol{\nu_2} & \qquad\qquad\boldsymbol{\nu_3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{CP}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \end{array}, \quad (2)$$

$c_{ij} = \cos\theta_{ij}$, $s_{ij} = \sin\theta_{ij}$, i,j = 1, 2, 3, а $\mathbf{P}_{Mjr} = \mathrm{diag}\left(e^{i\alpha_1/2}, e^{i\alpha_2/2}, 1\right)$ — диагональная матрица для майорановского нейтрино. Мы ограничимся дираковским нейтрино. Трибимаксимальная параметризация с $\theta_{12} = \arctan\left(1/\sqrt{2}\right) \cong 35.25°$, $\theta_{23} = \pi/4 = 45°$, $\theta_{13} = 0$ и $\delta_{CP} = 0$ до недавнего времени хорошо описывала эксперимент, но в настоящий момент показано, что $\theta_{13} \neq 0$ и что $\delta_{CP} \neq 0$. Описать смешивание с *CP*-нарушением можно экспоненциальной матрицей смешивания:

$$\mathbf{U}_{\exp} = \exp\mathbf{A}. \quad (3)$$

Для этого нужно вычислить логарифм матрицы смешивания, например, с помощью её Жордановой формы. Углы смешивания для нейтрино составляют:

$$\theta_{12} \cong 33.72°,\ \theta_{23} \cong 49.3°,\ \theta_{13} \cong 8.47°, \quad (4)$$

Исходя из этого получаем экспоненту матрицы смешивания в виде:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -0.0253632i & 0.551703+0.0557619i & -0.249131+0.136429i \\ -0.551703+0.0557619i & 0.0502214i & 0.834211+0.0319945i \\ 0.249131+0.136429i & -0.834211+0.0319945i & -0.0248583i \end{pmatrix} \tag{5}$$

так, что экспоненциальная параметризация (3) с (5) для **A** *точно* воспроизводит экспериментальные данные. Диагональные элементы матрицы **A** (5) малы, её след точно равен нулю: $\mathrm{Sp}[\mathbf{A}]=0$ и она представима в виде следующей суммы:

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}_{\mathrm{Rot}}+\mathbf{A}_{CP\_1}+\mathbf{A}_{\mathrm{diag\,Im}}, \tag{6}$$

$$\mathbf{A}_{\mathrm{Rot}}=\mathrm{Re}[\mathbf{A}]=\begin{pmatrix} 0 & 0.551703 & -0.249131 \\ -0.551703 & 0 & 0.834211 \\ 0.249131 & -0.834211 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $\mathbf{A}_{\mathrm{Rot}}$ описывает действительное вращение, а за *CP*-нарушение отвечает матрица

$$\mathbf{A}_{CP\_1}=i\,\mathrm{Im}[\mathbf{A}-\mathbf{A}_{\mathrm{diag\,Im}}]=\begin{pmatrix} 0 & 0.0557619i & 0.136429i \\ 0.0557619i & 0 & 0.0319945i \\ 0.136429i & 0.0319945i & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Матрица $\mathbf{A}_1=\mathbf{A}_{\mathrm{Rot}}+\mathbf{A}_{CP\_1}$ представляет сумму $\mathbf{A}_{\mathrm{Rot}}$, отвечающего за смешивание без *CP*-нарушения и вращение вокруг действительной оси, и $\mathbf{A}_{CP\_1}$, отвечающего за *CP*-нарушение и соответствующее вращение вокруг мнимой оси. Для $\delta_{CP}=272°$:

$$\mathbf{A}_1=\mathbf{A}_{\mathbf{Rot}}+\mathbf{A}_{\mathbf{CP\_1}}=\begin{pmatrix} 0 & 0.554514\mathrm{e}^{i5.7°} & 0.284041\mathrm{e}^{i151.3°} \\ -0.554514\mathrm{e}^{-i5.7°} & 0 & 0.834825\mathrm{e}^{i2.2°} \\ -0.284041\mathrm{e}^{-i151.3°} & -0.834825\mathrm{e}^{-i2.2°} & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Экспоненциальная параметризация позволяет факторизовать вклады вращения и *CP*-нарушения с матрицей $\mathbf{A_1}$ (9) и даёт <u>*почти точно*</u> экспериментальные данные:

$$\left|\overline{\mathbf{U}}_1\right|=\left|e^{\mathbf{A}_{\mathbf{Rot}}}e^{\mathbf{A}_{\mathbf{CP\_1}}}\right|=\begin{pmatrix} 0.822 & 0.553 & 0.131 \\ 0.386 & 0.539 & 0.749 \\ 0.417 & 0.635 & 0.650 \end{pmatrix}\approx$$

$$\approx \left|\mathbf{U}_{\text{best fit}}\right| = \begin{pmatrix} 0.823 & 0.549 & 0.147 \\ 0.374 & 0.546 & 0.750 \\ 0.428 & 0.633 & 0.645 \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Для действительной матрицы $\mathbf{A}_{\text{Rot}}$ с помощью представления $\mathbf{P}_{\text{Rot}} = e^{\mathbf{A}_{Rot}}$ вращения вокруг выделенной оси в трехмерном пространстве легко посчитать координаты вектор $\vec{\mathbf{n}} = \left(\frac{\nu}{\Phi}, \frac{\mu}{\Phi}, -\frac{\lambda}{\Phi}\right)$ и угол поворота $\Phi = \pm\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$. В зависимости от набора экспериментальных данных для нейтрино, угол $\mathbf{\Phi}$ и ось поворота $\vec{\mathbf{n}}_\nu$ меняются, но по отношению к аналогичной оси для кварков $\vec{\mathbf{n}}_q$, угол между $\vec{\mathbf{n}}_q$ и $\vec{\mathbf{n}}_\nu$ составляет с высокой точностью 45°. Этому эмпирическому факту, сформулированному выше с помощью экспоненциальной матрицы смешивания, соответствует гипотеза комплиментарности нейтрино и кварков.

Таким образом, с помощью Жордановой формы матрицы **A** нами получена обратная матричная экспонента, т.е. логарифм матрицы смешивания **U**. Это позволило найти значения показателя **A** матричной экспоненты для унитарной PMNS матрицы с *CP*-нарушением, *точно* воспроизводящие экспериментальные данные. Проведена факторизация матрицы смешивания, выделено действительное трехмерное вращение и соответствующее CP-нарушению мнимое вращение. Несмотря на значительный разброс экспериментальных данных, сравнение направления вектора действительного вращения $\vec{\mathbf{n}}_\nu$ для нейтрино и $\vec{\mathbf{n}}_q$ для кварков в экспоненциальной параметризации даёт угол между ними во всех случаях 44.5°–45.8°, что подтверждает гипотезу их дополнительности. Учёт CP-нарушения с мнимой экспонентой $\mathbf{A}_{CP\_1}$ даёт очень хорошее согласие с экспериментом. Новый анзац $\mathbf{A}_{CP\_1}$ и соответствующая экспоненциальная матрица $\mathrm{U} = \exp(\mathbf{A}_1)$ пригодны для любого значения *CP*-нарушающей фазы, а с учётом малого диагонального вклада:

$\mathbf{A}_{CP\_1}$+$\mathbf{A}_{\text{diagIm}}$, $\mathbf{A}_{\text{diag Im}} = i\,\text{diag}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\alpha_2 = 0.0502214$, $\alpha_1 \cong \alpha_3 \cong \alpha_2 / 2\alpha_3$,

получаем абсолютно точное описание всех экспериментальных данных.

Литература

1. К. В. Жуковский, Д. Даттоли, ЯФ, 71, с. 1838 (2008).
2. G Datolli and K. V. Zhukovsky, Eur. Phys. J. C 55, p. 547 (2008).
3. K. Zhukovsky and F. Melazzini, Eur. Phys. J. C 76, p. 462 (2016).
4. К. В. Жуковский, ЯФ, 80, №3, с. 1 (2017).

ЦИКЛОТРОННЫЙ РЕЗОНАНС В ГРАФЕНЕ

Проф. *Жуковский В.Ч.* и асп. *Фанасков В.С.*

Графен — это двумерный кристалл из атомов углерода с решеткой, состоящей из правильных шестиугольников. В 1947 году Филип Уоллес [1] установил зонную структуру графита а также получил закон дисперсии для квазичастиц $E=v_F\hbar|k|$, $v_F\sim c/300$. Несмотря на то, что закон дисперсии буквально в точности совпадает с законом дисперсии безмассового электрона, эффективная теория Дирака для возмущений вблизи точек Ферми была разработана лишь 37 лет спустя [2], [3]. С тех пор графен стал объектом изучения как физики твердого тела (см., например, [4], [5], [6]), так и физики высоких энергий, благодаря тому, что позволяет протестировать многие эффекты КЭД на лабораторном столе в хорошо контролируемых условиях [7], например, эффект Швингера [8], парадокс Клейна [9], эффект Казимира [10] и другие [7].

Графен был впервые получен в 2004 году [11], и результаты экспериментов, конечно, не были в полном согласии с теоретическими ожиданиями. Так одно из существенных отклонений демонстрирует циклотронный резонанс. В экспериментах [12], [13] в сильных магнитных полях (18Тл) величина $\omega/|\omega_c-\omega|$ В то время как обычные теоретические методы [14] (самосогласованное поле, теория линейного отклика) предсказывают намного более узкий спектр. В докладе будет показано, как нелинейные эффекты классическом и квазиклассическом уровне [15, 16], а также как коллективные эффекты позволяют предсказать сходные результаты [17].

Литература

1. Wallace, Philip Richard. “The band theory of graphite.” Physical Review 71.9 (1947): 622.
2. Semenoff, Gordon W. “Condensed-matter simulation of a three-dimensional anomaly.” Physical Review Letters 53.26 (1984): 2449.
3. DiVincenzo, D. P., and E. J. Mele. “Self-consistent effective-mass theory for intralayer screening in graphite intercalation compounds.” Physical Review B 29.4 (1984): 1685.
4. D. Ebert, V. Ch. Zhukovsky and E. A. Stepanov ”A pseudopotential model for Dirac electrons in graphene with line defects”, J. Phys.: Condens. Matter 26, 125502, https://doi.org/10.1088/0953-8984/26/12/125502.
5. E.A. Stepanov, V.C. Zhukovsky, “Graphene under the influence of Aharonov-Bohm flux and constant magnetic field”, Phys. Rev. B 94, 094101, https://doi.org/10.1103/PhysRevB.94.094101.
6. D. Ebert, K.G. Klimenko, P.B. Kolmakov, V.C. Zhukovsky, “Phase transitions in hexagonal, graphene-like lattice sheets and nanotubes under the influence of external conditions”, Annals of Physics, 2016, 371, August 2016, Pages 254–286, http://dx.doi.org/10.1016/j.aop.2016.05.001.

7. Katsnelson, Mikhail I. “Graphene: carbon in two dimensions.” Materials today 10.1 (2007): 20–27.
8. Allor, Danielle, Thomas D. Cohen, and David A. McGady. “Schwinger mechanism and graphene.” Physical Review D 78.9 (2008): 096009
9. Pereira Jr, J. Milton, et al. “Confined states and direction-dependent transmission in graphene quantum wells.” Physical Review B 74.4 (2006): 045424.
10. Marachevsky, Valery N. “Theory of the Casimir effect for graphene at finite temperature.” International Journal of Modern Physics: Conference Series. Vol. 14. World Scientific Publishing Company, 2012.
11. Novoselov, Kostya S., et al. “Electric field effect in atomically thin carbon films.” science 306.5696 (2004): 666–669.
12. Jiang, Z., et al. “Infrared spectroscopy of Landau levels of graphene.” Physical review letters 98.19 (2007): 197403.
13. Deacon, R. S., et al. “Cyclotron resonance study of the electron and hole velocity in graphene monolayers.” Physical Review B 76.8 (2007): 081406.
14. Mikhailov, S. A. "Nonlinear cyclotron resonance of a massless quasiparticle in graphene."Physical Review B 79.24 (2009): 241309.
15. Mikhailov, S. A. ”Non-linear electromagnetic response of graphene.” EPL (Europhysics Letters) 79.2 (2007): 27002.
16. Mikhailov, S. A., and K. Ziegler. “Nonlinear electromagnetic response of graphene: frequency multiplication and the self-consistent-field effects.” Journal of Physics: Condensed Matter 20.38 (2008): 384204.
17. Chirolli, Luca, et al. “Drude weight, cyclotron resonance, and the Dicke model of graphene cavity QED.” Physical review letters 109.26 (2012): 267404.

ОСЦИЛЛЯЦИИ НЕЙТРИНО В ОДНОРОДНОЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ

В. н. с. *Лобанов А. Е.*, студ. *Чухнова А. В.*

Для описания осцилляций нейтрино обычно используется теория, основанная на идеях Б. Понтекорво [1]. Эта теория хорошо согласуется с полученными на данный момент экспериментальными данными. Она применима для описания осцилляций нейтрино в области ультрарелятивистских энергий. Наряду с осцилляциями в вакууме представляют интерес явления, связанные с распространением нейтрино в веществе. Взаимодействие нейтрино с веществом в этом случае описывается эффективным потенциалом, связанным с рассеянием нейтрино вперед на фермионах среды [2]. Учет такого взаимодействия приводит к эффекту Михеева-Смирнова-Вольфенштейна [3], который помогает объяснить дефицит солнечных нейтрино. Кроме этого, взаимодействие со средой может приводить к перевороту спиральности нейтрино. Этот эффект подробно рассмотрен в работе [4]. Однако исследование корреляций между флейворными осцилляциями и переворотом спина до последнего времени не было проведено в рамках квантовой теории поля математически корректным образом.

В работе [5] была предложена модификация модели электрослабых взаимодействий, которая позволяет построить пространство Фока для флейворных состояний нейтрино, являющихся суперпозициями массовых состояний. В этой модели не только смешивание, но и осцилляции нейтрино являются следствием основных принципов квантовой теории поля. Такой подход позволяет построить теорию возмущений в представлении взаимодействия и использовать стандартную диаграммную технику для вычисления радиационных поправок. При этом можно дать явно ковариантное описание взаимодействия нейтрино с фермионами среды с помощью уравнения, аналогичного уравнению Дирака-Швингера квантовой электродинамики. Это уравнение становится локальным, когда можно использовать приближение Ферми. В этом случае взаимодействие нейтрино с веществом описывается эффективными 4-потенциалами, которые возникают вследствие редукции массового оператора нейтрино [6].

В представленной работе [7] получено эффективное уравнение, описывающее осцилляции нейтрино и прецессию его спина в веществе в квазиклассическом приближении. Найдено аналитическое решение этого уравнения для случая однородной движущейся среды, поляризация которой сохраняется.

Полученное решение использовано для расчета вероятностей переходов в модели двух флейворов между различными спин-флейворными состояниями нейтрино в движущейся неполяризованной плотной среде. В общем случае такие переходы характеризуются шестью частотами, четыре из которых возникают вследствие корреляций между флейворными осцилляциями и поворотом спиральности. Показано, что амплитуды переходов между различными спиновыми состояниями зависят только от скорости среды относительно наблюдателя, но не зависят от ее плотности. В частности, для покоящихся сред такие переходы отсутствуют. В этом случае вероятности осцилляций совпадают с известными формулами для осцилляций в среде (для левополяризованных нейтрино) и в вакууме (для правополяризованных).

Хорошо известно, что вероятность переворота спиральности массовых состояний нейтрино подавлена квадратами их лоренц-факторов (см., например, [4]). Из полученных результатов следует, что по крайней мере в модели с двумя флейворами корреляции с флейворными переходами не оказывают на эту вероятность существенного влияния.

Литература

1. Понтекорво Б., ЖЭТФ, 1957, том 33, с. 549.
2. Wolfenstein L., Phys. Rev. D, 1978, vol. 17, p. 2369.
3. Михеев С. П., Смирнов А. Ю., ЯФ, 1985, том 42, с. 1441.

4. Arbuzova E. V., Lobanov A. E., and Murchikova E. M., Phys. Rev. D, 2010, vol. 81, p. 045001.
5. Lobanov A. E., arXiv:1507.01256[hep-ph].
6. Лобанов А. Е., Изв. высш. учебн. завед. Физика, 2016, том 59, № 11, с. 141.
7. Лобанов А. Е., Чухнова А. В., Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. (в печати).

ФАЗА НЕОДНОРОДНОЙ ПИОННОЙ КОНДЕНСАЦИИ В КИРАЛЬНО-АССИМЕТРИЧНОЙ ПЛОТНОЙ КВАРКОВОЙ МАТЕРИИ В РАМКАХ МОДЕЛИ НАМБУ–ЙОНА-ЛАЗИНИО РАЗМЕРНОСТИ (1+1)

н.с. *Хунджуа Т. Г.*, проф. *Жуковский В. Ч.*, г.н.с. *Клименко К. Г.*,
н. с. *Жохов Р. Н.*

В связи с экспериментами по столкновению тяжелых ионов, а также с физикой компактных звезд, изучению плотной кварковой материи в последнее время уделяется большое внимание. Фундаментальной теорией взаимодействия кварков является квантовая хромодинамика (КХД). Однако, в силу ассимптотической свободы, при описании эффектов дальнего порядка оказывается невозможным использование пертурбативной техники, что сильно ограничивает предсказательную способность КХД. Тем не менее, в результате столкновения тяжелых ионов и в ядрах компактных звезд могут наблюдаться такие коллективные эффекты, как пионная конденсация, спонтанное нарушение киральной, изотопической и цветовой симметрии. К тому же ожидается, что в сильном магнитном поле, которое присутствует, как на ускорителях, так и в компактных звездах, может проявляться киральный магнитный эффект, в следствии которого в системе наблюдается разное количество левых и правых фермионов.

Все эти эффекты чрезвычайно сложно описать в рамках фундаментальной теории КХД. В таких случаях применяются эффективные модели. В частности, одной из наиболее широко применяемых теорий является модель четырех-фермионного взаимодействия, предложенная Намбу и Йона-Лазинио (НЙЛ) [1]. Эта модель имеет те же группы глобальной симметрии, что и КХД, а в пространстве (1+1) к тому же обладает свойствами перенормируемости и ассимптотической свободы, характерными для фундаментальных теорий.

Итак, в основе наших исследований лежит лагранжиан НЙЛ в пространтсве (1+1), который описывает кирально- и изоспиново- ассиметричную плотную кварковую материю:

$$L = \bar{q}\left[\gamma^{\nu} i\,\partial_{\nu} + \frac{\mu_B}{3}\gamma^0 + \frac{\mu_I}{2}\tau_3\gamma^0 + \frac{\mu_{I5}}{2}\tau^3\gamma^0\gamma^5\right]q + \frac{G}{N_c}\left[(\bar{q}q)^2 + (qi\gamma^5\vec{\tau}q)^2\right], \quad (1)$$

где двухкомпонентный дираковский спинор поля кварков $q(x) \equiv q_{i\alpha}(x)$ представляет собой также дублет по ароматам ($i = 1,2$ или $i = u, d$) и N_c — мультиплет по цветам ($\alpha = 1, \dots, N_c$) (в лагранжиане подразумевается суммирование по ароматовым, цветовым и спинорным индексам; τ_k ($k = 1,2,3$) — матрицы Паули, γ^ν — гамма матрицы Дирака, μ_B — химический потенциал по числу кварков, μ_I — химический потенциал по изотопическому числу, μ_{I5} — химический потенциал по аксиально-изотопическому числу).

Введение составных бозонных полей в следующем виде:

$$\sigma(x) = -2\frac{G}{N_c}(\bar{q}q),\ \pi_a(x) = -2\frac{G}{N_c}(\bar{q}i\gamma^5\tau_a q), \tag{2}$$

позволяет линеаризовать лагранжиан и привести его к виду:

$$L = \bar{q}[\gamma^\nu i\partial_\nu + \mu\gamma^0 + \nu\tau_3\gamma^0 + \nu_5\tau_3\gamma^1 - \sigma - i\gamma^5\pi_a\tau_a]q + \frac{N_c}{4G}[\sigma\sigma + \pi_a\pi_a], \tag{3}$$

где $\mu \equiv \frac{\mu_B}{3}, \nu \equiv \frac{\mu_I}{2}, \nu_5 \equiv \frac{\mu_{I5}}{2}$.

В нашей работе также рассматривается возможность образования пространственно-неоднородного конденсата в виде волны киральной плотности:

$$\langle\sigma(x)\rangle = M\cos(2kx),\ \langle\pi_3(x)\rangle = M\sin(2kx), \tag{4}$$

$$\langle\pi_1(x)\rangle = \Delta\cos(2k'x),\ \langle\pi_2(x)\rangle = \Delta\sin(2k'x). \tag{5}$$

Выбор данного анзаца продиктован множеством теоретических и экспериментальных работ в области конденсированного состояния и физики высоких энергий. Далее мы вычисляем термодинамический потенциал (ТДП) модели и ищем его точку глобального минимума. Такой подход позволяет описывать конкуренцию конденсатов, реализуемых при различных внешних параметрах μ, ν, ν_5.

В результате численных расчетов нам удалось построить серию фазовых диаграмм как для однородного [2], так и для неоднородного случая [3]. Рисунки 1 (однородный случай) и 2 (неоднородный случай) представляют собой схематичные 3-х мерные фазовые диаграммы. На рисунке 1 фазой PC отмечена фаза пионной конденсации, CSB соответствует фазе с нарушенной киральной симметрией, в фазах PCd и CSBd индекс d обозначает, что соответствующие фазы имеют ненулевую кварковую плотность. На рисунке 2 мы используем похожие обозначения, с той разницей, что фазы IPCd и ICSBd соответствуют фазам пионной конденсации и нарушенной киральной симметрии с зависимостью конденсатов от координаты (4), (5). Также на рисунке 2 мы используем обозначение «смешанная неоднородная фаза», которая соответствует ситуации с вырожденным вакуумом, т.е. с двумя эквивалентными точками глобального минимума ТДП, одна из которых реализует фазу неоднородного пионного конденсата, а вторая — фазу волны киральной плотности.

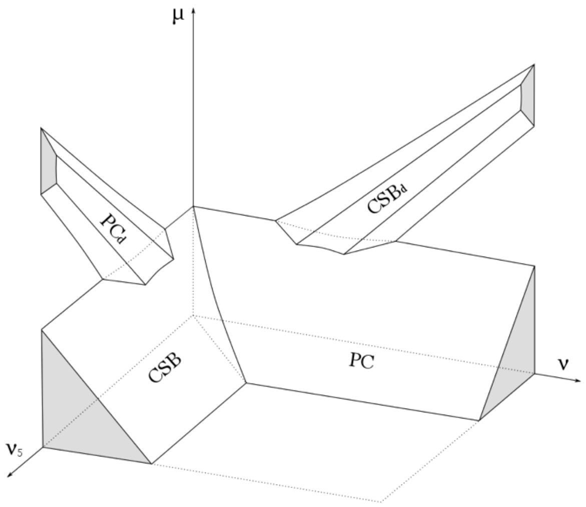


Рис. 1: Схематичный фазовый портрет (μ, ν, ν_5) для однородного случая $k = k' = 0$.

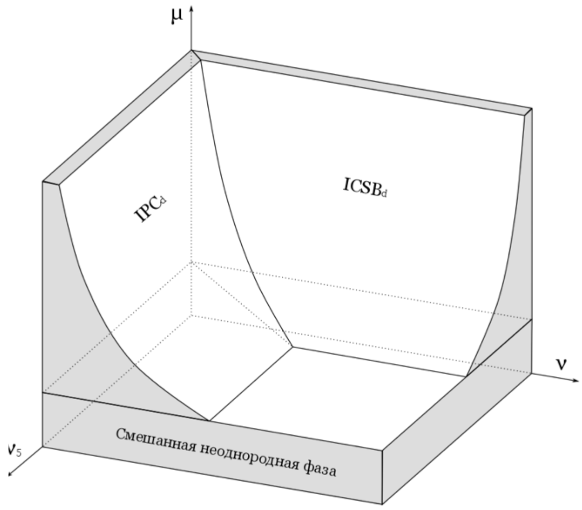


Рис. 2: Схематичный фазовый портрет (μ, ν, ν_5) для неоднородного случая $k \neq 0, k' \neq 0$.

Стоит отметить, что с середины 80-х годов эффект пионной конденсации был рассмотрен во множестве работ [4–7], используя различные методы и модели. Однако в нашей работе впервые было изучено одновременное влияние столь большого числа внешних параметров.

В частности, выяснилось, что аксиально-изотопический химический потенциал ν_5 может провоцировать образование фазы заряженного пионного конденсата PCd с ненулевой кварковой плотностью. Возможность образования такой фазы в реальных условиях остается одной из основных проблем плотной кварковой материи. Также на рисунке 2 видно насколько сильное влияние на систему могут оказывать пространственно-неоднородные конденсаты.

Литература

1. Nambu Y., Jona-Lasinio G. // Phys. Rev. 122: 345–358 (1961).
2. Ebert D., Khunjua T.G., Klimenko K.G. // Phys. Rev. D94: 116016 (2016).
3. Khunjua T.G., Klimenko K.G., Zhokhov R.N., Zhukovsky V.Ch. // Готовится к печати.
4. Migdal A.B. // JETP 36: No 6 (1973).
5. Sawyer R. F. // Phys. Rev. Lett. 29: 382–385 (1972).
6. Son D. T., Stephanov M.A. // Phys. Rev. Lett. 86: 592 (2001).
7. Ebert D., Klimenko K.G. // Eur. Phys. J. C46: 771–776 (2006).

УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ СПИНОВОГО ТОКА, ВЫЗВАННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЧАСТИЦ ПО КВАНТОВЫМ СОСТОЯНИЯМ

Ас. *Андреев П.А.*, проф. *Кузьменков Л.С.*

Эволюция спиновой плотности, как и многих других материальных полей, происходит вследствие двух механизмов. Первое это взаимодействие с окружающими частицами, пропорциональное моменту силы, действующий на магнитный момент. Второе это поток частиц, втекающий или вытекающий из окрестности рассматриваемой точки. Ограничиваясь спин-спиновым взаимодействием, запишем уравнение эволюции спиновой плотности [1]:

$$\partial_t \mathrm{S}^\alpha + \partial_\beta \mathrm{J}^{\alpha\beta} = \frac{2\mu}{\hbar}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\mathrm{S}^\beta \mathrm{B}^\gamma ,$$

где S^α вектор плотности спина, $\mathrm{J}^{\alpha\beta}$ тензор спинового тока, B^α вектор индукции магнитного поля, μ магнитный момент рассматриваемых частиц, $\hbar$ приведенная постоянная Планка, $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ символ Леви-Чивита.

Введение поля скоростей позволяет получить структуру полного спинового тока [1], [2]:

$$\mathrm{J}^{\alpha\beta} = S^\alpha \mathrm{v}^\beta - \frac{\hbar}{2m}\varepsilon^{\alpha\mu\nu} S^\mu \partial^\beta \left(\frac{S^\nu}{n}\right) + \mathrm{J}^{\alpha\beta}_{th} .$$

где n концентрация частиц, m масса частиц, v^α вектор поля скоростей, $\mathrm{J}^{\alpha\beta}_{th}$ тепловая часть спинового тока.

Первое слагаемое в правой части дает перенос спина при локально упорядоченном движении частиц. Второе слагаемое вызвано квантовой природой частиц. Последнее слагаемое связано с переносом спина при хаотическом (тепловом) движении и называется тепловой частью спинового тока. Однако, для фермионов тепловая часть спинового тока существует и при нулевой температуре. Так как фермионы распределены по различным квантовым состояниям в силу принципа Паули. Такой спиновый ток аналогичен по происхождению с давлением Ферми и называется спиновый ток Ферми.

Явный вид полного спинового тока содержит концентрацию частиц и поле скоростей. Таким образом, уравнение спиновой эволюции не является независимым уравнением, а является частью системы гидродинамических уравнений. Однако, как и известное, из гидродинамики уравнение Эйлера, содержащее давление требующее уравнение состояния для замыкания системы уравнений, уравнение эволюции спина содержит тепловую часть спинового тока, требующую уравнения состояния.

В данной работе предлагается вывод уравнения состояния для тепловой части спинового тока вырожденных частично спин-поляризованных спин-1/2 фермионов.

В предлагаемом выводе используется система уравнений квантовой гидродинамики с раздельной спиновой эволюцией [3], [4]. Уравнения непрерывности фермионов со спином вверх и фермионов со спином вниз, уравнения Эйлера для фермионов со спином вверх и фермионов со спином вниз выводятся из многочастичного уравнения Шредингера (Паули) методом многочастичной квантовой гидродинамики. При анализе вырожденных фермионов в уравнениях Эйлера используются соответствующие уравнения состояния для давлений фермионов со спином вверх и фермионов со спином вниз. Вывод уравнения эволюции спиновой плотности приводит к представленному выше уравнению.

Зная уравнения непрерывности и уравнения Эйлера, можно подобрать нелинейное уравнение Паули, из которого выводятся найденные ранее уравнения. Это нелинейное уравнение Паули содержит информацию об уравнениях состояния использованных в уравнениях Эйлера. Так как давления фермионов со спинов вверх отличается от давления фермионов со спином вниз в силу различия концентраций фермионов с различными проекциями спина, то слагаемое, отвечающее за давление, в нелинейном уравнении Паули имеет вид диагонального спинора второго ранга с различными элементами на диагонали. Полученное таким образом нелинейное уравнение Паули может быть использовано для вывода уравнения эволюции плотности спина. Такой вывод дает явный вид спинового тока Ферми [5]:

$$n(\partial_t+\mathbf{v}\cdot\nabla)\left(\frac{\mathbf{S}}{n}\right)-\frac{\hbar}{2m}\partial^\beta\left(\mathbf{S}\times\partial^\beta\left(\frac{\mathbf{S}}{n}\right)\right)+\frac{(3\pi^2)^{\frac{2}{3}}\hbar}{m}\left[\left(n+\mathrm{S}_z\right)^{\frac{2}{3}}-\left(n-\mathrm{S}_z\right)^{\frac{2}{3}}\right]\cdot\mathbf{S}\times\mathbf{e}_z=\frac{2\mu}{\hbar}\mathbf{S}\times\mathbf{B}$$

Из явного вида спинового тока Ферми видно, что он существует при отличной от нуля спиновой поляризации.

Возможен и другой, более привычный, способ вывода уравнения состояния для спинового тока Ферми. Используя квантовую кинетику частиц со спином и имея явный вид равновесной функции распределения спина, можно вычислить первый момент функции распределения спина и получить уравнение состояния. В этом случае результат зависит от выбора равновесной функции распределения спина. Такой подход был рассмотрен в работе [6] при изучении кинетической теории с раздельной спиновой эволюцией.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (грант №. 16-32-00886) и фонда Династия.

Литература

1. L. S. Kuz'menkov, S. G. Maksimov, V. V. Fedoseev, Microscopic quantum hydrodynamics of systems of fermions: Part I, Theor. Math. Phys. v. **126**, p. 110, (2001).
2. T. Takabayasi, On the hydrodynamical representation of non-relativistic spinor equation, Prog. Theor. Phys. v. 12, p. 810 (1954).
3. P. A. Andreev, L. S. Kuz’menkov, Separated spin-up and spin-down evolution of degenerated electrons in two dimensional systems: Dispersion of longitudinal collective excitations in plane and nanotube geometry, Eur. Phys. Lett. v. **113**, p. 17001, (2016).
4. P. A. Andreev, Separated spin-up and spin-down quantum hydrodynamics of degenerated electrons: Spin-electron acoustic wave appearance, Phys. Rev. E v. **91**, p. 033111, (2015).
5. P. A. Andreev, L. S. Kuz’menkov, On equation of state for the ”thermal” part of the spin current: Pauli principle contribution in the spin wave spectrum in cold fermion system, arXiv:1510.03468, (2015).
6. P. A. Andreev, Spin-electron acoustic waves: The Landau damping and ion contribution in the spectrum, Phys. Plasmas v. **23**, p. 062103, (2016).

Подсекция:

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Сопредседатели
профессор В. Ф. Бутузов, профессор Н. Н. Нефедов

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ В ВИДЕ ДВИЖУЩЕГОСЯ ФРОНТА ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТИПА РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ-АДВЕКЦИЯ

Зам. нач. упр. информатизации МГУ им. М.В.Ломоносова
Антипов Е.А., доц. *Левашова Н.Т.*, проф. *Нефедов Н.Н.*
a.evgen.a@gmail.com, natasha@wanaku.net, nefedov@phys.msu.ru

Исследуется решение в виде движущегося фронта следующей начально-краевой задачи типа реакция-диффузия-адвекция:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon\Delta u-\frac{\partial u}{\partial t}=(\mathbf{A}(u,x,y),\nabla)u+B(u,x,y),\quad y\in(0,a),\quad x\in(-\infty,+\infty),\quad t>0,\\
&u(x,0,t,\varepsilon)=u^0\left(x\right),\ u(x,a,t,\varepsilon)=u^1\left(x\right),\quad u(x,y,t,\varepsilon)=u(x+L,y,t,\varepsilon),\qquad (1)\\
&u(x,y,0,\varepsilon)\big|_{t=0}=u_{init}(x,y).
\end{aligned}
$$

Здесь $\mathbf{A}(u,x,y)=\{A_1(u,x,y),\ A_2(u,x,y)\}$, $\varepsilon\in\left(0;\varepsilon_0\right]$ — малый параметр. Будем считать, что функции $A_i\left(u,x,y\right)$, $i=1,2$, $B\left(u,x,y\right)$ достаточно гладкие в области $I_u\times\bar{D}$, где I_u — допустимый интервал значений *u*, $\bar{D}=\left\{\left(x,y\right):\mathbb{R}\times\left[0,a\right]\right\}$, $u^0\left(x\right)$ и $u^1\left(x\right)$ — непрерывные при $x\in\mathbb{R}$ *L*-периодические функции, $u_{init}\left(x,y\right)$ — непрерывная функция в $\bar{D}$, *L*-периодическая по переменной *x*.

Потребуем выполнения следующих условий:

Условие А1. Уравнение $(\mathbf{A}(u,x,y),\nabla)u+B(u,x,y)=0$ с дополнительным условием $u\left(x,0,t,0\right)=u^0\left(x\right)$ имеет решение $\varphi^{(-)}\left(x,y\right)$, а с дополнительным условием $u\left(x,a,t,0\right)=u^1\left(x\right)$ — решение $\varphi^{(+)}\left(x,y\right)$, где $\varphi^{(\mp)}\left(x,y\right)$ — достаточно гладкие в $\bar{D}$ *L*-периодические по переменной *x* функции, причем, $\varphi^{(-)}\left(x,y\right)<\varphi^{(+)}\left(x,y\right)$ при $\left(x,y\right)\in\bar{D}$.

Условие А2. Пусть всюду в области $\bar{D}$ выполняются неравенства

$$A_2\left(\varphi^{(-)}\left(x,y\right),x,y\right)>0,\ A_2\left(\varphi^{(+)}\left(x,y\right),x,y\right)<0$$

и пусть функции $F^{(\mp)}\left(x,y\right):=\dfrac{A_1\left(\varphi^{(\mp)}\left(x,y\right),x,y\right)}{A_2\left(\varphi^{(\mp)}\left(x,y\right),x,y\right)}$ удовлетворяют условию Липшица по переменной *x* в каждом прямоугольнике $\Pi=\left\{\left(x,y\right):0\le y\le a;\ x_0\le x\le L+x_0\right\}$ для $x_0\in\mathbb{R}$.

Мы будем исследовать решение задачи (1), которое имеет вид движущегося фронта, а именно, такое решение, которое в каждый момент времени вблизи прямой $y=0$ близко к поверхности $u=\varphi^{(-)}\left(x,y\right)$, а вблизи прямой $y=a$ близко к поверхности $u=\varphi^{(+)}(x,y)$ и резко изменяется от значений на поверхности $u=\varphi^{(-)}(x,y)$ до значений на поверхности $u=\varphi^{(+)}(x,y)$ в окрестности некоторой кривой $y=h(x,t)$.

Будем считать, что $y=h(x,t)$ — это та кривая, на которой решение $u(x,y,t)$ задачи (1) в каждый момент времени принимает значение, равное полусумме функций $\varphi^{(-)}(x,y)$ и $\varphi^{(+)}(x,y)$.

Для детального описания переходного слоя перейдем в окрестности этой кривой к локальным координатам (l,r) с помощью соотношений

$$x=l-r\sin\alpha,\ y=h(l,t)+r\cos\alpha \qquad \text{где} \qquad \sin\alpha=\frac{h_x(l,t)}{\sqrt{1+h_x^2(l,t)}},$$

$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+h_x^2(l,t)}}$, α–угол между осью y и нормалью к кривой $y=h(x,t)$, проведенной в область $y>h(x,t)$ в каждый момент времени, r – расстояние от этой кривой по нормали к ней, l – x-координата точки на этой кривой, из которой проводится нормаль.

Условие А3. Пусть существует гладкая кривая $y=h^0(x,t)$, являющаяся решением задачи

$$h_t^0=\left(\varphi^{(+)}(x,h^0)-\varphi^{(-)}(x,h^0)\right)^{-1}\int\limits_{\varphi^{(-)}(x,h^0)}^{\varphi^{(+)}(x,h^0)}\left(h_x^0A_1(u,x,h^0)-A_2(u,x,h^0)\right)du,$$

$$h^0(x,t)=h^0(x+L,t),\ h^0(x,0)=h^0(x),$$

где $h^0(x)$ – кривая, которая определяется равенством

$$u_{init}(x,y)=\frac{1}{2}\left(\varphi^{(-)}\left(x,h^0(x)\right)+\varphi^{(+)}\left(x,h^0(x)\right)\right).$$

Условие А4. Пусть выполняется неравенство

$$\int\limits_{\varphi^{(-)}(l,h^0(l,t))}^{\tilde{u}}\left(\begin{array}{c}\dfrac{h_t(l,t)}{\sqrt{1+h_x^2(l,t)}}-A_1(u,l,h(l,t))\dfrac{h_x(l,t)}{\sqrt{1+h_x^2(l,t)}}+\\ +A_2(u,l,h(l,t))\dfrac{1}{\sqrt{1+h_x^2(l,t)}}\end{array}\right)du>0$$

при $\varphi^{(-)}\left(l,h^0(l,t)\right)<\tilde{u}<\varphi^{(+)}\left(l,h^0(l,t)\right)$.

Для задачи (1) при выполнении условий А1–А4 построено асимптотическое приближение решения в виде двужущегося фронта и проведено доказательство существования такого решения. Доказательство проводится при помощи метода дифференциальных неравенств [1,2].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект N. 16-01-00437).

Литература

1. Нефедов Н.Н. Асимптотический метод дифференциальных неравенств в исследовании периодических контрастных структур: существование, асимптотика, устойчивость // Дифференц. ур-ния. 2000. Т. 36. № 2. С. 262–269.
2. Волков В. Т., Нефедов Н.Н. Развитие асимптотического метода дифференциальных неравенств для исследования периодических контрастных структур в уравнениях реакция-диффузия // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 4. С. 615–623.

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Доц. *Е. Е. Букжалёв*

Рассмотрена задача Коши для сингулярно возмущённого слабо нелинейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$\begin{aligned} &\varepsilon\, y' = a(x)\, y + b(x) + \varepsilon\, g(y,x), \quad x \in (0, X]; \\ &y(0;\varepsilon) = y^0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ — параметр возмущения, $X > 0$, $y^0 \in \mathbb{R}$, $a(x) < 0$ при всех $x \in [0, X]$,

$$a(x), b(x) \in C^1[0, X], \quad g(y,x) \in C^{1,0}(\mathbb{R} \times [0, X]).$$

Построена последовательность $y_n(x;\varepsilon)$ и определены такие положительные ε_0 и C_0, что, во-первых, при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существует единственное решение $y(x;\varepsilon)$ задачи (1) и, во-вторых, при любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и $x \in [0, X]$ справедливо неравенство

$$\left| y(x;\varepsilon) - y_n(x;\varepsilon) \right| \le C_0\, \varepsilon\, (\varepsilon / \varepsilon_0)^n. \tag{3}$$

Согласно (2) отклонение $y_n(x;\varepsilon)$ от $y(x;\varepsilon)$ (по норме $C\,[0, X]$) составляет $O\,(\varepsilon^{n+1})$ и стремится к нулю не только при $\varepsilon \to 0$, но и при $n \to \infty$. Таким образом, $y_n(x;\varepsilon)$ сходится к решению $y(x;\varepsilon)$ не только в асимптотическом, но и в обычном смысле.

Благодаря сходимости к точному решению последовательность $y_n(x;\varepsilon)$ может быть использована для обоснования асимптотик, получаемых с помощью различных асимптотических методов (например, с помощью метода пограничных функций — см. [1] или метода регуляризации сингулярных возмущений — см. [2]). Кроме того, способ построения и доказательства сходимости последовательности $y_n(x;\varepsilon)$ имеет перспективу обобщения на более широкие классы сингулярно возмущённых уравнений.

Литература

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. шк., 1990.
2. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.

НОВОЕ ПОКОЛЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ГЕНЕРАЦИИ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В НЕБЕСНЫХ ТЕЛАХ

Проф. *Д.Д. Соколов*, с. н. с.. *Е.В.Юшков*, ас. *Е.А.Михайлов,*
студ. *А.С.Шибалова*

Магнитные поля известны у многих небесных тел, включая некоторые планеты, многие звезды и спиральные галактики. Происхождение этих магнитных полей связано с действием механизма динамо. Этот механизм преобразует кинетическую энергию движений в магнитную энергию. Это явление происходит как результат электромагнитной индукции и связано с совместным действием дифференциального вращения и зеркально-асимметричной турбулентности или конвекции.

Модели динамо разной степени детальности для конкретных небесных тел строятся уже несколько десятилетий, однако до последнего времени эти модели либо описывали только крупномасштабное магнитное поле, либо основывались на методах прямого численного моделирования. В последнем случае модели получаются очень детальные, но их непросто интерпретировать. В частности, далеко не всегда ясно, как задавать для них реалистичные начальные условия и характеристики течений внутри небесного тела — об этих величинах нет достаточных наблюдательных или теоретических сведений.

В последнее время, во многом в работах нашей группы удалось развить компромиссный подход, в рамках которого удается приближенно, но с разумной полнотой воспроизводить мелкомасштабные эффекты в рамках моделей, ориентированных прежде всего на описание крупномасштабных магнитных полей. Об этом подходе рассказывается в докладе.

КОНТРАСТНЫЕ СТРУКТУРЫ С МНОГОЗОННЫМ ВНУТРЕННИМ ПЕРЕХОДНЫМ СЛОЕМ

Проф. *В.Ф. Бутузов*

1. *Рассмотрим краевую задачу*

$$\varepsilon^2 u'' = f(u, x, \varepsilon), \quad x \in (0;1), \tag{1}$$

$$u'(0,\varepsilon) = 0, \quad u'(1,\varepsilon) = 0, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $f(u,x,\varepsilon)$ — достаточно гладкая функция, $u(x,\varepsilon)$ — искомая скалярная функция. Известно (см., например, [1]), что если вырожденное уравнение, получающееся из (1) при $\varepsilon = 0$,

$$f(u, x, 0) = 0 \tag{3}$$

имеет три корня $u = \varphi_i(x),\ i = 1,2,3$, причём

$$\varphi_1(x) < \varphi_2(x) < \varphi_3(x), \quad x \in [0;1],$$

$$f_u(\varphi_i(x), x, 0) > 0, \quad i = 1,2; \quad f_u(\varphi_2(x), x, 0) < 0, \quad x \in [0;1], \tag{4}$$

то для достаточно малых ε существует решение $u(x,\varepsilon)$ задачи (1), (2), удовлетворяющее предельному равенству

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(x,\varepsilon) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x \in [0, x_0), \\ \varphi_3(x), & x \in (x_0, 1], \end{cases} \tag{5}$$

где x_0 — некоторая точка интервала (0; 1). Равенство (5) показывает, что при малых ε решение $u(x,\varepsilon)$ близко к корню $\varphi_1(x)$ вырожденного уравнения (3) слева от точки x_0 и близко к корню $\varphi_3(x)$ справа от точки x_0, и, значит, в малой окрестности точки x_0 образуется внутренний переходный слой, в котором происходит быстрый переход решения $u(x,\varepsilon)$ от корня $\varphi_1(x)$ к корню $\varphi_3(x)$. Решение с таким поведением называется контрастной структурой типа ступеньки (КСТС). Для различных уравнений и систем уравнений (обыкновенных и в частных производных) КСТС исследовались во многих работах (см., например, [2, 3] и указанную там библиографию). При этом рассматривался случай, когда выполнено условие (4), и, следовательно, корни $\varphi_i(x),\ i = 1,2,3$ вырожденного уравнения — простые (однократные). В этом случае быстрый переход решения $u(x,\varepsilon)$ от корня $\varphi_1(x)$ к корню $\varphi_3(x)$ носит экспоненциальный характер слева и справа от точки x_0, а полную асимптотику КСТС можно построить с помощью известного алгоритма А.Б. Васильевой [1].

2. *В работе [4] рассмотрен случай, когда функция* $f(u,x,\varepsilon)$ *имеет вид*

$$f(u,x,\varepsilon)=\left(u-\varphi_1(x)\right)^2\left(u-\varphi_2(x)\right)\left(u-\varphi_3(x)\right)-\varepsilon f_1(u,x,\varepsilon). \tag{6}$$

В этом случае корень $\varphi_1(x)$ уравнения (3) является двукратным, и это приводит к тому, что переходный слой становится четырёхзонным: справа от точки x_0 быстрое изменение решения имеет по-прежнему экспоненциальный характер, а слева от точки x_0 переходный слой состоит из трёх зон с различным характером быстрого изменения решения и различными масштабами соответствующих растянутых переменных в разных зонах. Для построения полной асимптотики КСТС требуется существенная модификация алгоритма А.Б. Васильевой, обусловленная кратностью корня $\varphi_1(x)$, что и сделано в [4].

3. *В докладе представлены новые результаты в исследовании КСТС с многозонным переходным слоем.*

Первый результат относится к задаче (1), (2) в случае, когда $f(u,x,\varepsilon)$ имеет вид (6). В отличие от работы [4], где точка перехода x_0 определялась как корень уравнения

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} f(u,x,0)\,du=0, \tag{7}$$

теперь рассматривается задача со сбалансированной нелинейностью. Это означает, что равенство (7) выполняется для любого $x\in[0;1]$. В этом случае x_0 является корнем другого (более сложного) уравнения. Построена асимптотика КСТС в этой задаче.

Другой новый результат получен для параболического уравнения

$$\varepsilon^2(\partial^2u/\partial x^2-\partial u/\partial t)=f(u,x,t,\varepsilon),\quad (x,t)\in D=(0;1)\times\mathbb{R}$$

с краевыми условиями Неймана и условием T — периодичности по времени

$$u(x,t+T,\varepsilon)=u(x,t,\varepsilon),\quad (x,t)\in\overline{D}.$$

Функция $f(u,x,t,\varepsilon)$ имеет вид, аналогичный (6):

$$f(u,x,t,\varepsilon)=\left(u-\varphi_1(x,t)\right)^2\left(u-\varphi_2(x,t)\right)\left(u-\varphi_3(x,t)\right)-\varepsilon f_1(u,x,t,\varepsilon).$$

где функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и f_1 являются T — периодическими по переменной t.

Доказано существование КСТС с четырёхзонным переходным слоем в окрестности T — периодической кривой

$$x=x_0(t),\qquad t\in\mathbb{R},$$

лежащей в области D, где функция $x=x_0(t)$ определяется как решение уравнения, аналогичного (7). Построено асимптотическое разложение этой КСТС. Кроме того, указан вид функции $f(u,x,t,\varepsilon)$, для которой переходный слой будет шестизонным.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №15-01-04619.

Литература

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа. 1990. 208 с.
2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефёдов Н.Н.// Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4. № 3. С. 799–851.
3. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефёдов Н.Н.// Труды МИАН. 2010. Т. 268. №2. С. 268–283.
4. Бутузов В.Ф.// Моделирование и анализ информационных систем. 2015. Т. 22. №1. С. 5–22.

ДОПУСТИМЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

акад. РАН *Васильев С.Н.*, проф. *Кушнер А.Г.*, м. н. с. *Морозов Н.Ю.*

Под допустимыми преобразованиями некоторого класса дифференциальных уравнений будем понимать преобразования, не выводящие за пределы этого класса. Допустимые преобразования используются как для классификации дифференциальных уравнений, так и для их упрощения.

Однако качественные свойства решений уравнений могут не наследоваться при допустимых преобразованиях. Например, для стационарных уравнений Шредингера класса

$$\ddot{z} = W(t) \cdot z \tag{1}$$

преобразования вида

$$(t,z) \to \big(w(t),\ v(t,z)\big),$$

где $w -$ дифференцируемая возрастающая функция, $v(t,z) = \sqrt{\dot{w}(t)} \cdot z$, являются допустимыми, сохраняя класс (1). Переносимость же, например, свойства устойчивости имеет место, если конкретизация преобразований w, v удовлетворяет условиям следующей теоремы для уравнений более общего вида:

$$\frac{dx}{dt} = F(t,x)\,, \qquad (t,x) \in T \times R^n, \qquad T = [0,\Delta)\,, \qquad \Delta \le \infty\,, \qquad F(t,0) = 0\,, \tag{2}$$

$$\frac{dy}{d\tau} = G(\tau,y), \qquad (\tau,y) \in T \times R^k, \qquad G(t,0) = 0\,, \tag{3}$$

связанных преобразованиями

$$w\colon T \to R^1, \qquad t \longmapsto \tau, \qquad v\colon T \times R^n \to R^k, \qquad (t,x) \longmapsto y.$$

Теорема. *Устойчивость (по Ляпунову, если $\Delta = \infty$, иначе – на конечном интервале) сохраняется при переходе от (2) к (3), если:*

а) при любых начальных условиях $(t_0, x_0) \in T \times R^n$ и $(\tau_0, y_0) \in T \times R^n$, связанных отображениями w, v, из существования решения $y(\tau)$ следует существование решения $x(t)$ и равенство

$$\forall t \in [t_0, \Delta) \quad v(t, x(t, t_0, x_0)) = y(w(t), w(t_0), v(t_0, x_0));$$

б) w – сюръекция и для любых $t_0 \in T$, $\tau_0 = w(t_0)$ $T_{\tau_0} \subseteq w(T_{t_0})$, где $T_\alpha = \{\beta \in T\colon\ \beta \geq \alpha\}$, $\alpha \in T$;

в) $v(t,x)$ непрерывно по x равномерно по t и при любых $t \in T$ и $\delta > 0$ существует окрестность $O_{\delta'}$, такая, что $O_{\delta'} \subseteq v(t, O_\delta)$, где $O_\delta = \{x \in R^n\colon ||x|| < \delta\}$, $O_{\delta'}$ – аналогичная окрестность в R^k.

Эта теорема обобщает или усиливает известные и получается, как и условия переносимости других свойств решений уравнений математической физики, с помощью алгоритмов и программных средств метода модельных аналогий [1–3]. Этим методом исследованы сложные по своим определениям свойства, например, свойство ε – попадания движений из некоторой начальной области в окрестность целевого множества при фазовых ограничениях и с положительной инвариантностью целевого множества относительно движений, стартующих из некоторого подмножества начальной области. Потребность изучения сложных динамических свойств характерна для задач управления инспекционными миссиями групп информационных роботов.

Метод иллюстрируется также на примере эволюционных дифференциальных уравнений вида

$$u_t = f(u)_{xx} \,. \tag{4}$$

Уравнения этого класса описывают движение грунтовых вод [4], фильтрацию двухфазной жидкости [5], распределение тепла при ядерном взрыве [6] и другие процессы.

Для уравнений (4) построена псевдогруппа Ли допустимых преобразований и проанализированы условия сохранения свойств устойчивости решений. Найдены условия существования конечномерных аттракторов для эволюционных уравнений [7].

Работа выполнена при частичной поддержке РНФ (проект 15-19-00275) и РФФИ (проект 16-29-04415).

Литература

1. Васильев С. Н., Дружинин А. Э., Морозов Н. Ю. Вывод условий сохранения свойств математических моделей // Доклады Академии наук. 2015, т. 465, № 1. С. 14–19.
2. Васильев С. Н., Кушнер А. Г. Инварианты дифференциальных уравнений и качественный анализ их решений // Ученые записки Физического факультета МГУ. 2016. № 3. С. 163103–1– 163103–3.

3. Васильев С. Н., Морозов Н. Ю. Компьютерное представление и обработка знаний на примере теорем об аналогиях математических моделей // Ученые записки Физического факультета МГУ. 2016. № 3. С. 163104–1–163104–3.
4. Boussinesq J. Recherches Theoriques sur Coulment des Nappes d'eau Infiltres dans le Sol // J. Math. Pures et Appl. 1904. V. 5 (X(1) 5–78). P. 363–394.
5. Buckley S.E., Leverett M.C. Mechanism of Fluid Displacement in Sands // Trans. AIME. V. 146. P. 107–116.
6. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П., Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Физматлит. – 2008. – 652 с.
7. Ахметзянов А.В., Кушнер А.Г., Лычагин В.В. Аттракторы в моделях фильтрации // Доклады Академии наук. – 2017, т. 472, № 6. С. 627–630.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ И РАЗРУШЕНИЕ ФРОНТОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ УРАВНЕНИЕМ БЮРГЕРСА С НЕЛИНЕЙНЫМ УСИЛЕНИЕМ

Проф. *НефедовН.Н.*, акад. РАН *Руденко О.В.*, доц. *Лукьяненко Д. В.*

В работе рассматривается проблема существования и распространения фронтов (решений с резкими переходными слоями), описываемых начально-краевой задачей для уравнения Бюргерса с кубическим усилением:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = -u\frac{\partial u}{\partial x} - u^3.$$

Построено асимптотическое приближение решений с движущимся фронтом. Выявлено влияние нелинейного усиления на процессы распространения и разрушения фронтов. Получены оценки локализации и времени разрушения. Теоретические результаты проиллюстрированы численными расчетами, развивающими идеи аналитико-численного исследования задач с переходными слоями.

Работа частично поддержана проектом РФФИ 16-01-00437.

ТОЧНОЕ ГАРМОНИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И УРАВНЕНИЯ ТИПА ГЮЕРА-КРУМХАНСЛЯ

в.н.с. *К.В. Жуковский*

Для глубокого понимания физических явлений аналитические решения обычно более полезны, чем численные. В большинстве случаев получить аналитическое решение модели физического процесса весьма сложно, если вообще возможно. Большое внимание в последнее время уделяется исследованию передачи тепла за рамками закона Фурье, $\partial_t T = \alpha\partial_x^2 T$. Его существенным недостатком является отсутствие инерции системы, т.е. изменение температуры в одной точке твердого тела воспринимается мгновенно во всех удаленных точках этого тела. Закон Фурье хорошо описывает теплопроводность в однородных твердых недеформируемых телах при нормальных условиях, но в сильно неоднородных средах и системах с пониженной размерностью может быть неприменим даже в нормальных условиях; при низких температурах < 25K он также не всегда справедлив. Наиболее значительное физическое явление, выходящее за рамки закона Фурье — второй звук — обнаружено в жидком гелии и в твердых кристаллах. Для его описания Каттанео был предложен фононный механизм и уравнение, являющееся частным случаем телеграфного уравнения (ТУ) без члена κ:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)F(x,t)=\left(\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\kappa\right)F(x,t),\quad \varepsilon,\alpha,\kappa=\mathrm{const}. \tag{11}$$

Его решение может быть получено, например, операторным и другими методами:

$$F(x,t)=e^{-\frac{t\varepsilon}{2}}\left(e^{-\frac{t}{2}\sqrt{\varepsilon^2+4\hat{D}(x)}}C_1(x)+e^{\frac{t}{2}\sqrt{\varepsilon^2+4\hat{D}(x)}}C_2(x)\right), \tag{12}$$

где $\hat{D}(x)=\alpha\partial_x^2+\kappa$ и $C_{1,2}(x)$ определяются из начальных условий. Рассмотрим пример гармонической функции и следующих начальных условий:

$$F(x,t)\big|_{t=0}=Ge^{inx},\ \partial F(x,t)/\partial t\big|_{t=0}=Be^{inx}. \tag{13}$$

Из (2) тогда следует следующее решение телеграфного уравнения (1):

$$F(x,t)\big|_{F(x)\propto e^{inx}}=B_1e^{inx-\frac{t}{2}\left(\varepsilon+\sqrt{V}\right)}+B_2e^{inx-\frac{t}{2}\left(\varepsilon-\sqrt{V}\right)},\ V=\varepsilon^2+4\left(\kappa-\alpha n^2\right), \tag{14}$$

$$B_1=\frac{-2B+G\left(-\varepsilon+\sqrt{V}\right)}{2\sqrt{V}},\quad B_2=\frac{2B+G\left(\varepsilon+\sqrt{V}\right)}{2\sqrt{V}}. \tag{15}$$

Решение (4) представляет собой сложение волн; легко показать, что оно может нарушать принцип максимума. С заменой $\varepsilon\to\varepsilon+n^2\delta$, где $\delta>0,\varepsilon>0$, в уравнении (1), получаем его решение (4) в виде:

$$F(x,t)\big|_{F(x)\propto e^{inx}}=C_1e^{inx-\frac{t}{2}\left(\varepsilon+n^2\delta+\sqrt{U}\right)}+C_2e^{inx-\frac{t}{2}\left(\varepsilon+n^2\delta-\sqrt{U}\right)},$$

$$U=(\varepsilon+n^2\delta)^2+4(\kappa-\alpha n^2), \tag{16}$$

где C_1, C_2 определяются из начальных условий; которое удовлетворяет уравнению:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}-\delta\frac{\partial^3}{\partial t\partial x^2}\right)F\left(x,t\right)=\left(\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\kappa\right)F\left(x,t\right),\ \alpha,\varepsilon,\delta,\kappa=\text{const}\,, \quad (17)$$

С κ=0 (7) представляет собой уравнение Гюйера–Крумхансля. С начальными условиями (3) его решение записывается в виде (6), где

$$C_1=-\frac{2B+G\left(m^2\delta+\varepsilon-\sqrt{U}\right)}{2\sqrt{U}},\quad C_2=\frac{2B+G\left(m^2\delta+\varepsilon+\sqrt{U}\right)}{2\sqrt{U}}. \quad (18)$$

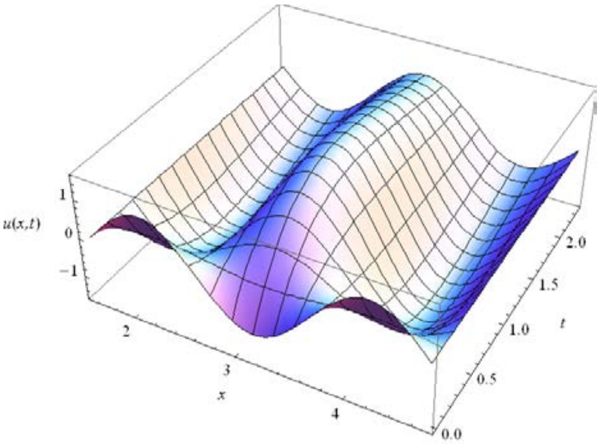
Справедливость (6), (8) проверяется прямой подстановкой в уравнение типа ГК (7).

При исследовании теплопроводности в тонких пленках встречается следующее уравнение типа Гюера–Крумхансля:

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial t}+2\frac{\partial}{\partial t}-\frac{10Kn^2}{3}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-3Kn^2\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}+1\right\}\theta_b(x,t)=0\,, \quad (19)$$

где $\theta_b=F(x,t)$ — баллистическая компонента безразмерной энергии, Kn — число Кнудсена. Действительная часть $\mathrm{Re}[F(x,t)]$ решения (6) (8) для уравнения типа ГК (9) с (3) для n = 3 показана на Рис. 1 для Kn = 0.1 слева, для Kn = 1 справа. Для малого числа Кнудсена Kn = 0.1 (см. Рис. 1 слева) решение похоже на то, что получается для ТУ: оно достигает максимума внутри области, и нарушается принцип максимума. В случае когда баллистические эффекты играют существенную роль и Kn=1 (см. Рис. 1 справа), видна быстрая релаксация решения. При этом выполняется принцип максимума и восстанавливается соответствующее второму закону термодинамики поведение системы. В решении (6) уравнения типа ГК (7), высшие гармоники затухают значительно быстрее, чем основная с n = 1 и эффективная теплопроводность увеличивается с ростом номера гармоники.

Итак, нами получено точное аналитическое решение гиперболического уравнения теплопроводности, ТУ, и в гармоническом анзаце получено решение уравнение Гюера–Крумхансля. Вторая производная по времени в гиперболическом уравнении теплопроводности обеспечивает конечную скорость распространения теплового импульса. Оно же приводит к возможности сложения волн; образуются максимумы и минимумы и не выполняется принцип максимума, установленный впрочем для эллиптических и параболических уравнений; в контексте переноса тепла это не соответствует второму закону термодинамики. Дополнительный член δ, соответствующий вкладу баллистических эффектов в теплопроводность в уравнении типа Гюера–Крумхансля, демпфирует тепловые волны Каттанео и локальные максимумы, восстанавливая соответствие поведения системы второму закону термодинамики. Эффективная теплопередача увеличивается с ростом номера гармоники.



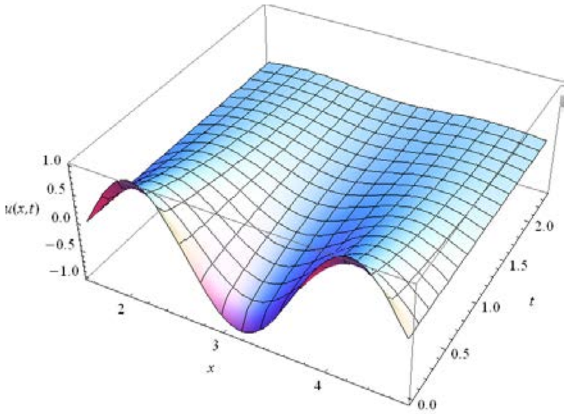


Рис. 1. Эволюция действительной части гармонического решения для $\theta_b(x,t)$ в тонкой плёнке с начальными условиями $\theta_b(x,0) = e^{i3x}$, $\partial\theta_{b,\,t}(x,0) = -7e^{i3x}$ в уравнении (9) при *Kn* = 0.1 слева и *Kn* = 1 справа.

Литература

1. K. V. Zhukovsky, H.M. Srivastava, *Appl Math. Comput.* 293 (2017) 423–437.
2. K. Zhukovsky, *J. Math. Anal. Appl.*, 446 №1 (2017) 628–647.
3. K. Zhukovsky, *Axioms* 5 (2016) 28.
4. K.V. Zhukovsky, *Int. J. Heat Mass Transfer.* 96 (2016) 132–144.
5. K.V. Zhukovsky, *Int. J. Heat Mass Transfer* 98 (2016) 523–529.
6. К. Жуковский, *ТМФ* 190 (2017) 58–77.

МГНОВЕННОЕ РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ХОХЛОВА-ЗАБОЛОТСКОЙ

проф. *М. О. Корпусов*

В теории нелинейной гидроакустики [1] возникает широко известное уравнение Хохлова-Заболотской, имеющее следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - \frac{c_0}{2}\Delta_\perp u = \frac{\varepsilon}{2c_0^2}\frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2},$$

где c_0 — равновесная скорость звука, ε — нелинейный акустический параметр. Для данного уравнения мы рассмотрим соответствующую задачу

Коши в наиболее слабой постановке и методом нелинейной емкости [2] получим следующую априорную оценку:

$$T^2\int_{R^3}\left(u_0(x)u_1(x)+\frac{1}{T}u_0^2(x)\right)dx \ge \int_0^T\int_{R^3} u^2(x,t)dxdt\,.$$

Из этой априорной оценки вытекает следующий важный результат. Если начальная функция $u_0(\mathrm{x})=0,$ то из этого неравенства вытекает, что $u(\mathrm{x,t})=0$ для почти всех $(\mathrm{x,t})\in \mathrm{R}^3\times(0,+\infty)$. Если при этом потребовать, чтобы функция $u_1(\mathrm{x})\in \mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{R}^3), u_1(\mathrm{x})\neq 0,$ то у задачи Коши для уравнения Хохлова-Заболтской не существует непрерывного решения $u(\mathrm{x,t})\in \mathrm{C}(\mathrm{R}^3\times[0,\mathrm{T}))$ ни для какого $T>0$. Действительно, если предположить, что оно существует, то мы сразу же получим, что $u(\mathrm{x,t})=0$ при $t\in[0,T), \mathrm{x}\in \mathrm{R}^3$. Но эта функция является, очевидно, дифференцируемой по $t\in[0,T)$ и ее производная $\dfrac{\partial u}{\partial t}(\mathrm{x,t})=0$ при $t\in[0,T)$. Но, с другой стороны, имеем $\dfrac{\partial u}{\partial t}(\mathrm{x},0)=u_1(\mathrm{x})\neq 0.$ Это противоречие доказывает отсутствие локального во времени непрерывного решения задачи Коши при указанных условиях на начальные функции.

Литература

1. С. Н. Гурбатов, О. В. Руденко, А. И. Савичев. Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
2. Э. Митидиери, С. И. Похожаев. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных. Тр. МИАН, том 234 страницы 3–383, 2001.

СУЩЕСТВОВАНИЕ И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АВТОВОЛНОВОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. с. *Мельникова А.А.*, студ. *Чэнь М.*
melnikova@physics.msu.ru; menchzu@gmail.com

В работе исследуется сингулярно возмущенная система уравнений типа реакция-диффузия.

$$\begin{cases} \varepsilon^4 u_{xx} - \varepsilon^2 u_t = (u - \varphi(v,x))(u^2 - 1), \\ \varepsilon^2 v_{xx} - \varepsilon^2 v_t = v - g(x)\big(u+3\big), \quad x \in (0;1), \quad t \in (0;T] \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad v_x(0,t) = v_x(1,t) = 0, \quad t \in (0;T], \\ u(x,0) = u_{init}(x), \quad v(x,0) = v_{init}(x), \quad x \in [0,1]. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\varphi(v,x) = 1 - 0.125v - 0.5x$, $g(x) = x + 1.4$, ε — малый параметр, $u_{init}(x), v_{init}(x)$ — некоторые начальные функции. В работе исследован вопрос существования у системы (1) решения в виде движущегося фронта для каждой из компонент.

Системы типа (1) с кубической нелинейностью в одном из уравнений используются для моделирования процессов в химической кинетике, экологии, биофизике [1], [2], [3]. В настоящее время актуальной задачей является изучение нелинейных неоднородных систем (см., например, [4]). Система, рассматриваемая в настоящей работе, может быть использована для моделирования процесса распространения фронта автоволны в неоднородной среде.

Изучение динамики развития автоволнового процесса предполагает решение таких вопросов, как определение скорости и закона движения фронта, характерной формы фронта, ширины переходного слоя, устойчивых уровней характеристик среды вдали от фронта. Все эти вопросы исследованы в настоящей работе.

Для задачи (1) описана методика построения асимптотического приближения решения типа движущегося фронта. Для построения асимптотики применялась теория контрастных структур, развитая в работах А.Б. Васильевой, В.Ф. Бутузова и Н.Н. Нефедова (см., например, [5]).

На основе асимптотики построены верхнее и нижнее решения. Согласно методу дифференциальных неравенств [6], [7]) существование верхнего и нижнего решений гарантирует существование решения задачи (1). На системы рассматриваемого типа метод дифференциальных неравенств развит в статье [8]. Считаем целесообразным в данной работе провести подробное описание процесса построения асимптотики, а также верхнего и нижнего решений для конкретной модельной задачи, поскольку в приложениях зачастую достаточно получить решение с точностью до первого порядка по малому параметру и доказать теорему существования для конкретной задачи проще, чем для общего случая.

Аналитическое исследование сингулярно возмущенных задач может быть использовано и при разработке численных алгоритмов. Построение численного решения для задач с малым параметром при старшей производной требует применения специальных алгоритмов, поскольку задачи относятся к классу жестких. Рациональное решение предполагает, в частности, сгущение сетки в области переходного слоя. Асимптотический анализ позволяет получить необходимую априорную информацию о положении слоя. Разработки по созданию адаптивных динамических сеток, которые сгущаются в области фронта, представлены в работе [9].

Однако вопрос устойчивости и сходимости использованных разностных схем остается открытым. Данная работа, содержащая асимптотическое приближение точного решения и полное обоснование асимптотики типа фронта, может помочь в исследовании сходимости и устойчивости адаптивных сеток.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты N. 16-01-00437, 15-01-04619).

Литература

1. A. Hagberg and E. Meron. Pattern formation in non-gradient reaction-diffusion systems: the effects of front bifurcations. Nonlinearity, vol. 7, no. 3, pp. 805–835, 1994.
2. V. I. Zarnitsina, F. I. Ataullakhanov, A. I. Lobanov, and O. L. Morozova. Dynamics of spatially nonuniform patterning in the model of blood coagulation. Chaos An Interdiscip. J. Nonlinear Sci., vol. 11, no. 1, p. 57, 2001.
3. Y. Mori et al. Wave-pinning and cell polarity from a bistable reaction-diffusion system. Biophys. J., vol. 94, no. 9, pp. 3684–97, 2008.
4. А. Э. Сидорова, Н. Т. Левашова, А. А. Мельникова, Л. В. Яковенко. Популяционная модель урбоэкосистем в представлениях активных сред. Биофизика, vol. 60, no. 3, pp. 574–582, 2015.
5. В.Ф. Бутузов, А.Б. Васильева, Н.Н. Нефедов. Асимптотическая теория контрастных структур. Автоматика и телемеханика, no. 7, pp. 4–32, 1997.
6. C. V. Pao. Periodic Solutions of Parabolic Systems with Nonlinear Boundary Conditions. J. Math. Anal. Appl., vol. 234, no. 2, pp. 695–716, 1999.
7. Н.Н. Нефедов. Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями. Дифференциальные уравнения, vol. 31, no. 7, pp. 1142–1149, 1995.
8. Н. Т. Левашова, А. А. Мельникова. Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе параболических уравнений. Дифференциальные уравнения. vol. 51, no. 3, pp. 339–358, 2015.
9. D. V. Lukyanenko, V. T. Volkov, N. N. Nefedov, L. Recke, and K. Schneider. Analytic-Numerical Approach to Solving Singularly Perturbed Parabolic Equations with the Use of Dynamic Adapted Meshes. Model. Anal. Inf. Syst., vol. 23, no. 3, pp. 334–341, 2016.

Подсекция:

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Сопредседатели
академик С. Н. Васильев, профессор А. Н. Боголюбов,
профессор А. И. Чуличков

СМЕШАННЫЙ ДИСКРЕТНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕДУЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ ВЛАСОВА–ДАРВИНА

Доц. *Бородачев Л.В.*, студ. *Беляев А.А.*

Как известно, множество эффектов, обусловленных коллективными взаимодействиями частиц в плазме, носят нерелятивистский и безызлучательный характер [1]. Это объясняет устойчивый интерес к физическим приложениям дискретного по методу крупных («макро») частиц безызлучательного (магнитоиндукционного, дарвинского) моделирования в области низкочастотных электромагнитных явлений плазмофизики [2]. Примерами подобных задач могут служить хорошо известные исследования бесстолкновительных ударных волн, ионно-циклотронных колебаний, кинетических неустойчивостей разреженной магнитоактивной плазмы, взаимодействия поля с веществом и т.п.

Привлекательной особенностью дарвинского формализма является возможность достоверного описания ряда электромагнитных эффектов, связанных с законом Фарадея, в рамках незапаздывающих систем [3]. При этом отсутствие в системе коротковолновых полевых мод, связанных с эффектами излучения, обуславливает корректность сравнительно крупномасштабной дискретизации пространственно-временного континуума в процессе численного моделирования.

Вместе с тем формализму присуща достаточно сложная численная интерпретация, особенно в контексте неявных разностных схем, в частности, обусловленная необходимостью эллиптической переформулировки дарвинских полевых уравнений, исходно имеющих гиперболический тип, противоречащий аналитическому представлению систем с мгновенным дальнодействием [4].

Дополнительно необходимо учесть традиционно большие объемы вычислений в современных компьютерных экспериментах по методу макрочастиц, связанные с сохранением в модельной среде возможно большего значения основного плазменного параметра — так называемой, дебаевской плотности частиц, определяющей степень физической достоверности полученных численных результатов ($n_D >> 1$, где на величину n_D существенно влияет размерность рассматриваемого фазового пространства) [5].

Таким образом, становится понятной сложившаяся ситуация, при которой большая часть реально работающих магнитоиндукционных кодов адаптирована к большим программно-вычислительным комплексам кластерного типа, имеющим, как правило, достаточно ограниченный круг пользователей [6].

В этой связи представляется важной формулировка такого дарвинского алгоритма, который окажется эффективным и при реализации на компьютерах среднего класса, уровня рабочих станций или мощных PC. Решение этой задачи видится на пути сокращения фазового пространства за счет его конфигурационной части и представления самосогласованной безызлучательной модели плазмы в экономичном лагранжево-гамильтоновом виде, особенно эффективном для замкнутых систем в силу сохранения канонического импульса частиц.

Литература

1. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1976, 238 с.
2. Нильсон К., Льюис Г. Модели укрупненных частиц в безызлучательном пределе. – В кн.: Управляемый термоядерный синтез, М.: Мир, 1980, стр. 395–418.
3. Darwin C.G. Dynamical Motions of Charged Particles // – Phil. Mag. (1920) 39, p. 537–551.
4. Бородачев Л.В. Численная интерпретация полевого описания в дискретной дарвинской модели с неявной схемой расчета динамики частиц // – Мат. Моделирование (2005) 17, № 9, с. 53–59.
5. Hockney R.W., Eastwood J.W. Computer Simulation Using Particles. N.-Y.: McGraw-Hill, 1981, 540 p.
6. Бородачев Л.В., Коломиец Д.О. Параллельные вычисления в дарвинской PIC-модели // – Комп. Исследования и Моделирование (2015) 7, № 1, с. 61–69.

ОБ ОБЛАСТИ ЛОКАЛИЗАЦИИ ТОЧЕК ВОЗНИКНОВЕНИЯ ОБРАТНЫХ ВОЛН В ВОЛНОВОДЕ С АНИЗОТРОПНЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

Проф. *Делицын А.Л.*

В волноводах с неоднородным заполнением возможно распространение обратных волн, характеризующихся противоположными знаками фазовой и групповой скоростей. Возникновение подобных волн возможно и в волноводах с постоянным, но анизотропным заполнением. Для волновода квадратного сечения задача допускает точное решение, которое достаточно просто анализируется.

При определенном соотношении коэффициентов анизотропии затухающие волны, характеризующиеся отрицательным квадратом постоянной распространения, переходят в комплексные волны, имеющие ненулевые действительную и мнимую части квадрата постоянной распространения. При критическом значении частоты комплексная волна порождает прямую и обратную бегущие волны. Обратная волна существует на конечном отрезке изменения частоты, после чего преобразуется в затухающую.

Рассмотрена область возникновения обратных и комплексных волн в зависимости от параметра анизотропии. Установлено, что эта область является эллипсом.

Литература

1. А. Л. Делицын. Об одном подходе к вопросу о полноте нормальных волн волновода с магнитодиэлектрическим заполнением// Дифференц. уравнения, 36:5 (2000), 629–633.
2. А. Н. Боголюбов, А. Л. Делицын, А. Г. Свешников. Озадаче возбуждения волновода с неоднороднымзаполнением // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 39:11 (1999), 1869–1888.
3. А. Н. Боголюбов, А. Л. Делицын, А. Г. Свешников. О полноте системы собственных и присоединенных функций волновода // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 38:11 (1998), 1891–1899.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КВАЗИАДИАБАТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ ПЛАЗМЫ В ТОКОВЫХ СЛОЯХ СОЛНЕЧНОГО ВЕТРА

Проф. *Попов В.Ю.*, в. н. с. *Малова Х.В.*, в. н. с. *Григоренко Е.Е.*, с. н. с. *Хабарова О.В.*

Исследуется квазиадиабатическая динамика заряженных частиц в сильных токовых слоях (СТС) в солнечном ветре, в том числе в гелиосферном токовом слое (ГТС). Разработана самосогласованная гибридная модель СТС, в которой динамика ионов описывается с использованием квазиадиабатического подхода, а движение электронов предполагается замагниченным и описывается в приближении ведущего центра.

Развита кинетическая самосогласованная модель ГТС, в которой могут присутствовать ионы с квазиадиабатической динамикой. ГТС рассматривается как равновесная вложенная токовая структура, где вклад в ток вносят два основных сорта плазмы с разными температурами (низкоэнергичная фоновая плазма СВ и высокоэнергичная компонента СКЛ).

Будем предполагать, что на границе слоя функция распределения ионов является суммой функций распределения двух популяций ионов с температурами T_α и тепловыми скоростями $V_{T\alpha}$ (здесь и далее будем использовать индекс $\alpha = 1,2$, обозначающий номер популяции, причем $\alpha = 1$ соответствует более холодной, а $\alpha = 2$ — более горячей ионной популяции). На границах ТС функции $f_\alpha(\mathbf{v})$ выбраны в виде смещенных максвелловских распределений с потоковыми скоростями $v_{D\alpha}$, направленными практически вдоль магнитных силовых линий к слою и от слоя:

$$f_\alpha(\mathbf{v}) = \frac{n_{0\alpha}}{2\left(\sqrt{2\pi}\, v_{T\alpha}\right)^3 \left(1 + erf\left(\frac{v_{D\alpha}}{v_{T\alpha}}\right)\right)} \sum_{s=1,2} \exp\left\{-\frac{\left(v_{\|} + (-1)^s v_{D\alpha}\right)^2 + v_\perp^2}{2 v_{T\alpha}^2}\right\}. \quad (1)$$

Здесь $n_{0\alpha}$ — плотность плазмы вне токового слоя, $v_{D\alpha}$ и $v_{T\alpha}$, соответственно, средние потоковая и тепловая скорости популяции ионов с индексом $\alpha = 1,2$, $v_{||}$ и $v_{\perp}$ — проекции скоростей ионов вдоль и поперек магнитного поля. Индексы $s = 1,2$ соответствуют входящим и выходящим ионным потокам на границах ТС. Функция распределения (1) определена на интервале изменения адиабатических инвариантов протонов $I_z \le v_0^2 m / \omega_0$ ($v_0 = \sqrt{v_{||}^2 + v_{\perp}^2}$ — полная скорость, $\omega_0 = eB_0/mc$ — частота вращения ионов в поле B_0 на краях токового слоя).

Можно записать функцию распределения в виде функции только интегралов движения и, используя теорему Лиувилля, расширить область применимости функций на весь слой. При этом используется связь между магнитным моментом заряженной частицы $\mu = mv_{\perp}^2/(2B_0)$, квазиадиабатическим инвариантом I_z движения $I_z = (2mc/e)\mu$ вдали от токового слоя, тогда функция распределения может быть представлена в виде функции, зависящей от двух интегралов движения: полной энергии $W = mv^2/2 + e\Phi(z)$ (Φ — электростатический потенциал, v — скорость частицы) и квазиадиабатического инварианта движения I_z:

$$f_\alpha(z,\mathbf{v}) = \frac{n_{0\alpha}}{\left(\sqrt{2\pi}\, v_{T\alpha}\right)^3 \left(1 + \operatorname{erf}\left(\varepsilon_\alpha^{-1}\right)\right)} \exp\left\{ -\frac{\left(\sqrt{v^2 - \frac{\omega_0}{m} I_z + \frac{2e}{m}\Phi} - v_{D\alpha}^{\;2}\right) + \frac{\omega_0}{m} I_z}{2 v_{T\alpha}^{\;2}} \right\}, \tag{2}$$

где $\varepsilon_\alpha = v_{T\alpha}/v_{D\alpha}$ — потоковый параметр. Квазиадиабатический инвариант движения ионов I_z выражается соотношением:

$$I_z(z,\mathbf{v}) = \frac{m}{\pi} \int_{z_0}^{z_1} \left(v_y^2 + v_z^2 + \frac{2e}{m}\left(\Phi(z) - \Phi(z')\right) - \left(v_y + \frac{e}{mc}\left[\int_{z'}^{z} B(z'')dz'' \right] \right)^2 \right)^{1/2} dz', \tag{3}$$

где верхний и нижний пределы определяются из условия обращения в 0 подинтегральной функции. Окончательно, система «ионных» уравнений Власова-Максвелла принимает следующий вид:

$$f_\alpha(z,\mathbf{v}) = F_\alpha\big(W(z,\mathbf{v}), I_z(z,\mathbf{v})\big),$$

$$v_z \frac{\partial f_\alpha}{\partial z} + \frac{e}{m_p}\left(-\nabla\Phi(z) + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}], \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}}\right) = 0\,, \quad \alpha = 1,2,$$

$$\frac{dB_x}{dz} = \frac{4\pi}{c}\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^3} v_y f_1(z,\mathbf{v})d^3\mathbf{v} + \int\limits_{\mathbb{R}^3} v_y f_2(z,\mathbf{v})d^3\mathbf{v} + j_{ey}(z)\right\}, \tag{4}$$

$$B_x(z)\big|_{z\to\pm\infty} = B_0\,, \quad \Phi(z)\big|_{z\to\pm\infty} = \Phi_0\,,$$

$$n_1(z) + n_2(z) + n_e(z) = n(z), \quad n(z)\big|_{z\to\pm\infty} = n_0\,.$$

Уравнения движения электронов имеют вид:

$$m_e \frac{d\mathbf{u}_{e\|}}{dt} = -e\mathbf{E}_\| - \frac{\nabla_\| p_{e\|}}{n_e} + \frac{1}{n_e}\left(p_{e\|} - p_{e\perp}\right)\nabla_\|\left(\ln B\right) \tag{5}$$

$$\mathbf{j}_{e\perp} = -en_e c\frac{[\mathbf{E}\times\mathbf{b}]}{B} + \frac{c}{B}[\mathbf{b}\times\nabla_\perp p_{e\perp}] + \frac{c}{B}\left(p_{e\|} - p_{e\perp}\right)\left[\mathbf{b}\times(\mathbf{b},\nabla)\mathbf{b}\right]\,. \tag{6}$$

Моделирование показало, что профиль СТС определяется относительным вкладом двух токов: (i) ток, поддерживаемый размагниченными протонами, которые движутся по разомкнутым квазиадиабатическим орбитам, и (ii) дрейфовым током электронов. Обнаружено, что СТС представляет собой многослойную структуру, состоящую из тонкого токового слоя, вложенного в гораздо более толстый плазменный слой. Этот результат хорошо согласуется с наблюдениями СТС при ~ 1 а.е. Показано, что тонкая структура различных СТС, в том числе ГТС, представляет собой узкий токовый (толщиной ~ 10^4 км), встроенного в более широкую область около 10^5 км при 1 а.е. Кроме того, показано, что многомасштабная структура является неотъемлемой особенностью СТС в солнечном ветре.

Можно предположить, что квазиадиабатическое движение размагниченных протонов в токовых слоях различного происхождения обусловливает возникновение узкого токового слоя, встроенного в более широкий плазменный слой, поддерживаемый тепловой изотропной популяцией типа Харриса. Мы предполагаем, что многомасштабность является неотъемлемой чертой всех токовых слоев, которые демонстрируют тенденцию к самоорганизации в солнечном ветре. Дальнейший анализ измерений in situ будет проводиться для более детальной оценки многомасштабного характера сильных токовых слоев (в том числе ГТС) в солнечном ветре.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта 14-12-00824 Российского научного фонда, гранта РФФИ №. 16-02-00479 и, частично, гранта РФФИ №. 14-02-00769.

Литература

1. Behannon, K. W., Neubauer, F. M., & Barnstorf, H. 1981, JGR, 86, 3273.
2. Büchner, J., Zelenyi, L.M. 1989, JGR, 94, 11821.
3. Gosling, J. T., Asbridge, J.R., Bame, S.J., Feldman, W.C., & Hildner, E. 1977, JGR, 82, 5005.
4. Harris, E.G. 1962, Nuovo Cim., 23, 115, doi:10.1007/BF02733547.
5. Hu, Q., & Sonnerup, B. U. O. 2003, JGR, 108(A1), 1011, doi:10.1029/2002JA009323.
6. Kislov R.A., Khabarova, O., & Malova, H.V. 2015, JGR, 120, 8210.
7. Khabarova, O., Zank, G. P., Li, G., et al. 2015a, ApJ, 808, 181.
8. Khabarova, O., Zank, G. P., Li, G., et al. 2015b, JPhCS, 642, 012033.
9. Khabarova, O. V., Zank, G. P., Li, G., et al, 2016, ApJ, 827, 122, doi:10.3847/0004-637X/827/2/122.
10. Lin, R. P., Anderson, K. A., Ashford, S. et al. 1995, SSRv, 71, 1, 125, doi: 10.1007/BF00751328.
11. Milovanov, A. V. & Zelenyi, L. M. 1994, in: Solar System Plasmas in Space and Time, Geoph. Monograph, 84, ed. J. L. Burch & J. H. Waite (AGU, Washington, DC, 1994), 43.
12. Parker, E. N. 1958, ApJ, 128, 664.
13. Petrukovich, A. A., Artemyev, A.V., Malova, H.V., et al. 2011, JGR, 116, CiteID A00I25.
14. Plotnikov, I., Rouilllard, A.P., Davies, J.A., et al. 2016, arXiv:1606.01127, SoPh, doi:10.1007/s11207-016-0935-9.
15. Schatten, K. H. 1972, in: Solar Wind, ed. C. P. Sonett et al. Washington, Scientific and Technical Information Office, National Aeronautics and Space Administration., 44.
16. Sitnov, M. I., Zelenyi, L. M., Malova, H. V., & Sharma, A .S. 2000, JRG, 105, 13029.
17. Sönnerup, B.U.Ö., & M. Scheible 1998, in: Analysis Methods for Multi-Spacecraft Data, ed. G. Pashmann & P.W. Daly, ISSI Scientific Report SR-001, Bern, Chap. 8, 185.
18. Winterhalter, D., Smith, E.J., Burton, M.E., Murphy, N., & McComas, D. J. 1994, JGR, 99, 6667.
19. Zelenyi, L. M., Malova, H.V., Popov, V. Y., Delcourt, D., & Sharma, A. S. 2004, NPGeo, 11, 579.
20. Zelenyi, L. M., Malova, H. V., Popov, V. Yu, Delcourt, D. C., Ganushkina, N. Y., & Sharma, A. S. 2006, GeoRL, 33, CiteID L05105, doi: 10.1029/2005GL025117.
21. Zelenyi L.M., Malova Kh.V., Artemyev A.V., Popov V.Yu., Petrukovich A.A. 2011, Plasma Phys Rep, 37, 2, 118, doi: 10.1134/S1063780X1102005X.
22. Zharkova, V. V, & Khabarova, O. V. 2012, ApJ, 752, 35.
23. Zharkova, V.V., & Khabarova, O. V. 2015, AnGeo, 33, 457, doi:10.5194/angeo-33-457-2015.

ПОЛНОСТЬЮ КОНСЕРВАТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ РАСЧЕТА МИКРОВОЛНОВЫХ ПРИБОРОВ С ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ

проф. *А.Г. Свешников*, проф. *А.Н. Боголюбов*, проф. *А.А. Быков*

Аннотация. Для адекватного количественного описания мощных генерирующих приборов миллиметрового диапазона требуется решение нелинейной нестационарной самосогласованной задачи расчета электромагнитного поля и движения электронного пучка. Принципиально важное значение имеет создание консервативных алгоритмов решения нестационарной задачи, обеспечивающих на дискретном уровне точное выполнение законов сохратения, присущих исходной постановке задачи, в том числе законов сохранения тока, магнитного потока, энергии, импульса для поля и для частиц. Полная задача расчета клистрона миллиметрового диапазона включает расчет катода, околокатодного слоя с пространственным электронным зарядом, электростатического поля ускоряющих электродов, области дрейфа, возбуждающего и формирующих резонаторов, выходного резонатора, коллектора и ряда вспомогательных систем. Мы представляем алгоритм расчета электромагнитного поля и электронного пучка клистрона, основанный на серии работ по несколько отличающейся тематике, выполненных в 1980–90 годы на кафедре математики физического факультета МГУ под руководством профессора А.Г. Свешникова. В этой серии работ были созданы и строго обоснованы полностью консервативные конечно-разностные модели расчета плазменных ускорителей и устройств с осциллирующим виртуальным катодом (виркаторов). Мы покажем, что разработанные для решения этих задач алгоритмы могут быть применены для решения задачи расчета клистронов.

1. Введение. В настоящее время значительное внимание привлекает использование мощных микроволновых генераторов, основанных на использовании различных физических принципов, в том числе клистронов, клистронов многолучевых, клистронов с релятивистскими пучками. Создание таких приборов невозможно без точного расчета параметров электромагнитного поля и электрогооного пучка, выполненного с применением точных алгоритмов, основанных на использовании математических моделей уравненрий Максвелла, уравнений движения заряженных частиц в нестационарном электромагнитном поле, вычисления собственного поля пучка, расчета процессов в катоде и коллекторе. Модели, основанные на представлении электромагнитного поля в виде гармонических осцилляций, не дают достаточной точности, так как для мощных приборов потеря мощности пучка внутри выходного резонатора сравнима с энергией пучка, соответственно поле резонатора при прохождении электронного сгустка меняется за время, много меньше периода осцилляций. Решение нестационарных задач требует создания алгоритмов, для которых на уровне дискретной задачи выполняются те же законы сохранения, которые верны для точной модели, основанной на уравнениях Максвелла, уравнениях движения частиц со всеми дополнительными условиями. Такие модели были созданы в 1980–1990-х годах на кафедре математики физического факультета МГУ под руководством профессора А.Г.Свешникова [1], [2], [3], [4], упомянуты не все работы. Этот цикл работ продолжает столь же фундаментальный цикл работ [5], посвященных расчету распространения волн в неоднородных средах. Важной частью дискретной математической модели должны быть условия в полубесконечном волноводе, обеспечивающем отвод энергии из выходного резонатора. Эти условия призваны обеспечить заданную структуру поля внутри отводящего волновода. Это поле будет состоять только из волн, распространяющихся в направлении от резонатора к внешней нагрузке. Такие условия, называемые нестационарными условиями излучения, сформулированы в работе [1] и затем были обобщены на случай радиальных волноводов в последующих работах. Таким образом, мы предлагаем модель расчета мощного клистрона миллиметрового диапазона, основанную на использовании послностью консервативных разностных схем для поля и для частиц, а также точные условия сопряжения с подсоединенными волноводами.

2. Расчет электромагнитного поля. Внутри области D с подсоединенными полубесконечными волноводами D_1, D_2, поле удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},\ \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$$

с начальными и граничными условиями $\mathbf{E}\big|_{t=0} = \mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}\big|_{t=0} = \mathbf{H}_0$, $\mathbf{E}_\tau\big|_{\partial D} = 0$. Для обобщенного решения уравнений Максвелла выполнен закон сохранения энергии. Пусть $L_1 > 0$, $L_2 > 0$ и D_L есть вся область, ограниченная металлическими стенками, в том числе область внутри D и внутри отрезков подводященго и отводящего волноводов, для которой $z_1 < L_1$ и $z_2 < L_2$, где z_1 и z_2 есть продольные координаты вдоль оси соответственно подводящего и отводящего волноводов. Тогда закон сохранения энергии поля имеет вид

$$\frac{1}{8\pi}\iiint_{D_L}(\mathbf{E}^2(t_1) + \mathbf{H}^2(t_1))dxdydz = \frac{1}{8\pi}\iiint_{D_L}(\mathbf{E}^2(t_0) + \mathbf{H}^2(t_0))dxdydz -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\iiint_{D_L}\left(\mathbf{J},\mathbf{E}\right)dxdydz + \int_{t_0}^{t_1}\frac{c}{4\pi}\sum_{j=1}^{J}\iint_{\Sigma_j}\left(\left[\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right]\Big|_{z_j=L_j},\mathbf{e}_{z_j}\right)dx_j dy_j dt.$$

Для расчета электромагнитного поля мы используем метод дискретной аппроксимации. Этот метод основан на представлении электрического и магнитного полей на семействе сдвинутых по пространственным координатам и по времени сетках (рисунок 1). Это гарантирует точное соблюдение дискретного аналога закона сохранения энергии для приближенного решения. При выполнении дифференцироования по пространственной координате или по времени результат относится к сетке, ячейки которой сдвинуты на половину шага. Таким образом, каждая физическая величина определена на той сетке, которая соответствует положению этой величины в операторе дифференцирования.

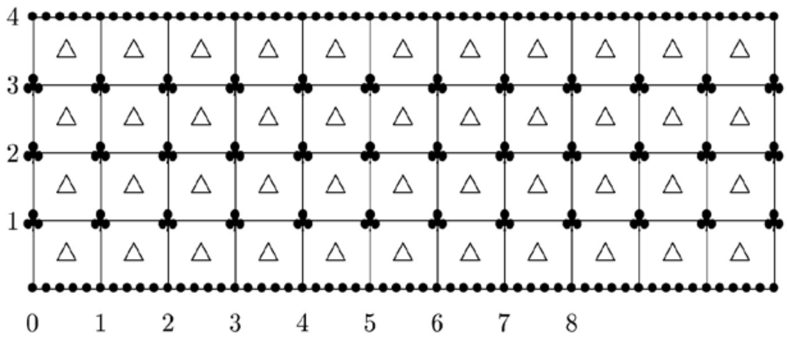


Рис. 1.

Введем целые и полуцелые сетки по каждой из координат:

$$\Omega_R=\{r_p\}, r_p=r_0+ph_r,\quad \Omega_Z=\{z_q\}, z_q=z_0+qh_z,\quad \Omega_T=\{t_m\},\quad t_m=t_0+mh_t,$$
$$\Omega_{RZ}=\Omega_R\times\Omega_Z,\quad \Omega_{\hat{R}}=\{\hat{r}_p\},\ \hat{r}_p=r_0+(p+1/2)h_r,\ \Omega_{\hat{Z}}=\{\hat{z}_q\}, \hat{z}_q=z_0+(q+1/2)h_z,$$
$$\Omega_{\hat{T}}=\{\hat{t}_m\}, \hat{t}_m=t_0+(m+1/2)h_t,\ \Omega_{\hat{R}Z}=\Omega_{\hat{R}}\times\Omega_Z,\ \Omega_{R\hat{Z}}=\Omega_R\times\Omega_{\hat{Z}},\ \Omega_{\hat{R}\hat{Z}}=\Omega_{\hat{R}}\times\Omega_{\hat{Z}},$$
$$\Omega_{RZT}=\Omega_R\times\Omega_Z\times\Omega_T,\ \Omega_{RZ\hat{T}}=\Omega_R\times\Omega_Z\times\Omega_{\hat{T}},\ \text{и т.д.}$$

Аппроксимация операторов дифференцирования имеет вид:

$$\Delta/\Delta r : F(\Omega_{RZ})\to\Omega_{\hat{R}Z},\ \left(\Delta f/\ \Delta r\right)\Big|_{r_{p+1/2,z_q}}=\Big(f(r_{p+1},z_q)-f(r_p,z_q)\Big)\Big/h_r,$$

и аналогично для $\Delta/\Delta z$, $\Delta/\Delta t$. Обозначим гибридные двумерные пространственные сетки, получающиеся как декартово произведение соответствующей пары одномерных пространственных сеток $\Omega\mathrm{R}$, $\Omega\mathrm{Z}$, $\Omega\Theta$. Пространственно-временные сетки, получающиеся как декартово произведение соответствующей двумерной гибридной пространственной сетки и соответствующей временной сетки, $\Omega\mathrm{R}\times\Omega\mathrm{T}$ и т.д. Введем сеточные функции

$E_R \in F(\Omega\mathrm{R}\times\Omega\mathrm{T})$, $E_Z \in F(\Omega\mathrm{Z}\times\Omega\mathrm{T})$, $H_\Theta \in F(\Omega\Theta\times\Omega\mathrm{T})$, $J_R \in F(\Omega\mathrm{R}\times\hat{\Omega}\mathrm{T})$, $J_Z \in F(\Omega\mathrm{Z}\times\hat{\Omega}\mathrm{T})$, $J_\Theta \in F(\Omega\Theta\times\hat{\Omega}\mathrm{T})$ и т.д. Дискретные уравнения Максвелла примут вид:

$$\frac{\Delta E_R}{\Delta t} = -c\frac{\Delta H_{\hat{\Theta}}}{\Delta z} - 4\pi J_R,\ \ \frac{\Delta E_Z}{\Delta t} = \frac{c}{r}\left(\frac{\Delta(r\cdot H_\Theta)}{\Delta r}\right)^{\hat{}} - 4\pi J_Z,$$

$$\frac{\Delta H_\Theta}{\Delta t} = -c\left(\frac{\Delta E_R}{\Delta z} - \frac{\Delta E_Z}{\Delta r}\right)^{\hat{}} - 4\pi J_\Theta,$$

дискретные граничные условия $E_Z(a, z_q, t_m) = 0,\ E_Z(b, z_q, t_m) = 0,$ начальные условия ставятся очевидным образом. Энергия дискретной системы вычисляется так:

$$\varepsilon(E_R, E_Z, H_\Theta) = \frac{1}{4}h_r h_z\left(\sum_{\Omega\mathrm{R}} rE_R^2 + \sum_{\Omega\mathrm{Z}} rE_Z^2 + \sum_{\Omega\Theta} rH_\Theta^2\right)$$

Можно показать, что для $\varepsilon(E_R, E_Z, H_\Theta)$ выполнен аналог закона сохранения энергии.

3. Нестационарные условия излучения. На поверхности раздела клистронного выходного резонатора и отводящего волновода необходимо поставить условия, обеспечивающие отсутствие волн, приходящих по этому волноводу, так что поле внутри отводящего волновода будет состоять только из волн, распространяющихся в направлении от резонатора к внешней нагрузке. Используем полную систему собственных функций и собственных значений краевой задачи $\nabla_\perp^2\mathbf{e} + \chi^2\mathbf{e} = 0,$ и $\nabla_\perp^2\mathbf{h} + \chi^2\mathbf{h} = 0,$ с граничными условиями на Γ первого и второго рода соотвесттвенно, $\chi^2 = \kappa^2 - \gamma^2,\ \nabla_\perp u = (u_x, u_y, 0)$, Γ есть граница круга или кругового кольца. Выразим поперечные компоненты полей:

$$\mathbf{e}_\perp = -\frac{i\gamma}{\chi^2}\nabla_\perp\mathbf{e}_z + \frac{i\omega\mu}{\chi^2}\left[\mathbf{n}_z\times\nabla_\perp\mathbf{h}_z\right],\ \mathbf{h}_\perp = -\frac{i\gamma}{\chi^2}\nabla_\perp\mathbf{h}_z - \frac{i\omega\varepsilon}{\chi^2}\left[\mathbf{n}_z\times\nabla_\perp\mathbf{e}_z\right],$$

где $\left[\mathbf{n}_z\times\nabla_\perp u\right] = (-\partial u/\partial y, \partial u/\partial x, 0)$. Используем в качестве координатной системы поля TM и TE типов: $\mathbf{e}_{n,z}^{TM} = \varphi_n,\ \mathbf{e}_{n,\perp}^{TM} = -\left(i\gamma/\alpha_n^2\right)\nabla_\perp\varphi_n,\ \mathbf{h}_{n,z}^{TM} = 0,$ $\mathbf{h}_{n,\perp}^{TM} = -\left(i\omega\varepsilon/\alpha_n^2\right)\left[\mathbf{n}_z\times\nabla_\perp\varphi_n\right],\ \ \mathbf{e}_{n,z}^{TE} = 0,\ \ \mathbf{e}_{n,\perp}^{TE} = \left(i\omega\mu/\beta_n^2\right)\left[\mathbf{n}_z\times\nabla_\perp\phi_n\right],\ \ \mathbf{h}_{n,z}^{TE} = \phi_n,$ $\mathbf{h}_{n,\perp}^{TE} = -\left(i\gamma/\beta_n^2\right)\nabla_\perp\phi_n$.

4. Нестационарное представление поля в подсоединенных волноводах. Общее решение уравнений Максвелла в подсоединенных волноводах можно представить в виде суперпозиции волн TE и TM типа, бегущих в каждом из волноводов:

$$\mathbf{H}_{\perp}^{(j)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{h}_{k,j,\perp}^{TE}(x_j, y_j) A_{k,j}^{TE}(z_j, t) + \mathbf{h}_{k,j,\perp}^{TM}(x_j, y_j) A_{k,j}^{TM}(z_j, t),$$

аналогично выражаются компоненты $\mathbf{E}_{\perp}^{(j)}$. Из уравнений Максвелла следует, что коэффициенты разложения поля по полной системе нормальных волн удовлетворяют уравнению Клейна-Гордона

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial {z_j}^2} + (\gamma_j^{TE,TM})^2 \right) A_{k,j}^{TE,TM} = 0.$$

Общее решение в продольно однородных участках $z_j > L_j$ найдем, используя проебразование Фурье по координате z_j:

$$A_{k,j}(z_j, t) = -c\int_{t_0}^{t - \left(z_j - L \right)/c} \frac{\partial A_{k,j}}{\partial z_j}(L_j, t) J_0(\gamma_j \sqrt{c^2(t-\tau)^2 - (z_j - L_j)^2})d\tau,$$

здесь и далее упоминание о принадлежности к TE и TM типам опущено. Поэтому, положив $z_j = L_j$, получим

$$A_{k,j}(L, t) = -c\int_{t_0}^{t} \frac{\partial A_{k,j}}{\partial z_j}(L_j, t) J_0(\gamma_j c(t-\tau))d\tau. \qquad (1)$$

Будем говорить, что для электромагнитного поля $\mathbf{E}, \mathbf{H}$, заданного в $D_L \times [0, T]$, выполнены условия излучения, если в каждом полубесконечно продольно однородном подсоединенном волноводе D_j сужение каждой компоненты поля на поперечное сечение Σ_j принадлежит $L^2(\Sigma_j)$ и коэффициенты Фурье разложения поля по полной системе нормальных волн для каждого индекса k нормальной волны TE и TM типов удовлетворяют условиям (1). Таким образом, сформулированы нестационарные условия излучения. Дискретные условия излучения строятся путем дискретизации формулы (1) на сетке.

5. Консервативная разностная схема. Ограничимся только цилиндрическими подсоединенными волноводами круглого сечения и аксиально симметричными волнами:

$$\frac{\partial E_r}{\partial t} = -c\frac{\partial H_\theta}{\partial z} - 4\pi J_z, \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{c}{r}\frac{\partial r H_\theta}{\partial r} - 4\pi J_z, \frac{\partial H_\theta}{\partial t} = -c(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r}),$$

с граничными и начальными условиями

$$E_z\big|_{r=a,r=b}=0, E_r\big|_{t=t_0}=E_z\big|_{t=t_0}=H_\theta\big|_{t=t_0}=0,\ \text{тогда условия (1)}$$

$$(H_\theta)_k(L,t)=-c\int_{t_0}^{t}\frac{\partial (H_\theta)_k}{\partial z}(L,\tau)J_0(\gamma_k c(t-\tau))d\tau,$$

где $(H_\theta)_k(z,t)=\left(H_\theta,h_k(r)\right)_r$, причем $\left(f,g\right)_r=2\pi\int_a^b rf(r)g(r)dr,$ и $\left.\frac{drh_k}{dr}\right|_{r=a}=0,\ \frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}rh_k=-\gamma_k^2 h_k,\ \left.\frac{drh_k}{dr}\right|_{r=b}=0$.

Теорема 1. *Имеет место дискретный аналог закона сохранения энергии электромагнитного поля:*

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t}=-2\pi h_r h_z\left(\sum_{\Omega Z} rE_{\hat{Z}}J_Z+\sum_{\Omega R} rE_{\hat{R}}J_R+\sum_{\Omega\Theta} rH_{\hat{\Theta}}J_\Theta\right)+\frac{c}{4\pi}\left\langle H_\Theta\big|_{z=L}, E_R\big|_{z=L-h_z/2}\right\rangle_r.$$

Таким образом, дискретная модель электромагнитного поля удовлетворяет точно условию сохранения энергии.

6. Метод крупных частиц. Построим сужение векторных функций $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$ на сетку: $\mathbf{p}_n^{(j)}$, $\mathbf{r}_n^{(j)}$, $\mathbf{r}_n^{(j)}=\mathbf{r}_n(t_j)$, $\mathbf{v}_n^{(j)}=\mathbf{v}_n(t_j)$, $n=1,...,N$ $j=1,...,J$. Консервативная схема имеет вид

$$\frac{\mathbf{p}_n^{(j+1)}-\mathbf{p}_n^{(j)}}{\tau}=M_n\frac{\mathbf{g}(\mathbf{r}_n^{(j+1)})+\mathbf{g}(\mathbf{r}_n^{(j)})}{2},\ \mathbf{v}_n^{(j+1/2)}=\frac{\mathbf{p}_n^{(j+1/2)}}{M_n},$$

$$\frac{\mathbf{r}_n^{(j+1)}-\mathbf{r}_n^{(j)}}{\tau}=\frac{1}{M_n}\frac{\mathbf{p}_n^{(j+1)}+\mathbf{p}_n^{(j)}}{2},$$

где $E_n^{(j)}=(\mathbf{p}_n^{(j)})^2/2M_n$, $\mathbf{v}_n^{(j+1/2)}=(\mathbf{v}_n^{(j+1)}+\mathbf{v}_n^{(j)})/2$. Система для $\mathbf{p}_n^{(j+1)}$ и $\mathbf{r}_n^{(j+1)}$ является нелинейной. Для решения используем итерационный алгоритм:

$$(\mathbf{p}_n^{(j+1,s+1)}-\mathbf{p}_n^{(j)})/\tau=\left(M_n/2\right)(\mathbf{g}(\mathbf{r}_n^{(j+1,s)})+\mathbf{g}(\mathbf{r}_n^{(j)})),$$

$$(\mathbf{r}_n^{(j+1,s+1)}-\mathbf{r}_n^{(j)})/\tau=(\mathbf{p}_n^{(j+1,s)}+\mathbf{p}_n^{(j)})/2M_n,$$

где s есть номер итерации. Начальные условия итерационного процесса $\mathbf{p}_n^{(j+1,0)}=\mathbf{p}_n^{(j)}$, где $\mathbf{p}_n^{(j)}=\lim_{s\to+\infty}\mathbf{p}_n^{(j,s)}$. Найдем плотность частиц на сетке и плотность потока на сетке по формулам

$$\rho_k^{(j+1/2)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{M_n}{|D_k|} \left(\frac{1}{2} h_k(\mathbf{r}_n^{(j+1)}) + \frac{1}{2} h_k(\mathbf{r}_n^{(j)})\right),$$

$$\mathbf{J}_k^{(j+1/2)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{M_n \mathbf{v}_n^{(j)}}{|D_k|} \left(\frac{1}{2} h_k(\mathbf{r}_n^{(j+1)}) + \frac{1}{2} h_k(\mathbf{r}_n^{(j)})\right).$$

Пусть $E_n^{(j)} = (\mathbf{p}_n^{(j)})^2 / 2M_n$, Тогда $(E_n^{(j+1)} - E_n^{(j)}) / \tau = \left((\mathbf{p}_n^{(j+1/2)})^2 / 2M_n, \mathbf{g}(\mathbf{r}_n^{(j+1/2)})\right)$.

Просуммировав по всем частицам, получим дискретный закон сохранения энергии частиц:

$$\frac{1}{\tau}\left(\sum_{n=1}^{N} E_n^{(j+1)} - \sum_{n=1}^{N} E_n^{(j)}\right) = \sum_{k=1}^{K} \left(\mathbf{J}^{(j+1/2)}(\hat{\mathbf{r}}_k), \mathbf{g}(\mathbf{r}_n^{(j+1/2)})\right) |D_k|$$

Далее мы строим гибридный алгоритм, включающий консервативный алгоритм расчета поля с плотностью заряда и тока, которая вычисляется из уравнения Больцмана, и консервативный алгоритм расчета функции распределения электронов, причем поля на сей раз вычисляются из дискретного аналога уравнений Максвелла со всеми дополнительнымит условиями. Для замкнутого таким образом дискретного алгоритма расчета поля и частиц также выполняется закон сохранения полной энергии.

Abstract. The exact quantitative design of high-power millimeter-range generating devices is based on the solution of the nonlinear non-stationary self-consistent problem for the electromagnetic field and the electron beam. We present the conservative algorithms for the solution of the non-stationary Maxwell’s equations and Bolzmann’s equation. The discrete model provides a precise conservation laws for the current, the magnetic energy flux, the momentum for the field and for the particles and for the whole energy of field and particle. The general problem of the millimeter–wave klystron design includes the cathode design, the cathode electric layer design, electron density, the electrostatic field of the accelerating electrodes, the drift region, the input and output resonators, a collector and a number of auxiliary systems. We present an algorithm for calculation of the electromagnetic field and the electron beam in the klystron, based on a series of papers concerning several different subjects, published in 1980-90 by the science group in the Department of Mathematics Faculty of Physics of Moscow State University, governed by professor A.G.Sveshnikov. In this series of publications the conservative finite-difference model of calculation of plasma accelerators and devices with an oscillating virtual cathode (vircators) were created and justified completely. We show that these algorithms can be applied to solve the klystron design problem.

Литература

1. А. Р. Майков, А. Г. Свешников, С. А. Якунин, Разностная схема для нестационарных уравнений Максвелла в волноводных системах, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 26:6 (1986), 851–863.
2. А. Р. Майков, А. Д. Поезд, А. Г. Свешников, С. А. Якунин, Применение консервативного конечно-разностного метода для моделирования сильноточных приборов СВЧ, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 29:7 (1989), 1000–1011.
3. М. В. Кузелев, А. Д. Поезд, А. А. Рухадзе, А. Г. Свешников, С. А. Якунин, Математическое моделирование процессов в плазменном СВЧ генераторе, Матем. моделирование, 1:11 (1989), 34–40.
4. А. Р. Майков, А. Г. Свешников, С. А. Якунин, Нелокальные условия излучения для нестационарной системы уравнений Максвелла, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 30:12 (1990), 1785–1796.
5. Свешников А.Г. К обоснованию метода расчета распространения электромагнитных колебаний в нерегулярных волноводах. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963. Т. 3. С. 314–326.

СТРАТЕГИИ УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ ВВЕДЕНИЯ ПРЕПАРАТОВ ПРИ ЛЕЧЕНИИ РАКА

Проф. *Афанасьев В.Н.*, студ. *Матвеева Н.А.*

В работе рассматривается метод синтеза управления нелинейным объектом с квадратичным функционалом качества, основанный на приеме «расширенной линеаризации» исходной математической модели объекта. При этом параметры нелинейного регулятора определяются решениями матричного уравнения типа Риккати с параметрами, зависящими от состояния. Основная проблема реализации такого регулятора заключается в сложности нахождения решения этого уравнения в темпе функционирования объекта. Предложен метод решения проблемы, основанный на поиске параметров регулятора для каждого временного шага интервала управления. Разработанный метод синтеза и реализации управления нелинейным объектом проверяется путем построения стратегии введения препаратов при лечении рака с использованием математической модели динамики процесса роста раковой ткани и ее взаимодействия с нормальными и иммунными клетками. Для проверки эффективности полученных решений было проведено математическое моделирование, результаты которого также приведены в данной работе.

Метод синтеза управлений с представлением модели нелинейного объекта уравнением с параметрами, зависящими от состояния

Пусть исходная модель рассматриваемого процесса имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = f(x) + g(x)u(t),\ x(t_0) = x_0, \\ &f, g : t_f \times \Omega \to R^4,\ (x) \to f(x), g(x). \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь $[t_0, t_f]$ — интервал управления; $x(t) \in \Omega_x$, где Ω_x — область (открытое связанное множество) R^4, содержащая начало; $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}$ — состояние системы; $x_0 \in \Omega_x$; $u \in R^1$ — управление, подлежащее нахождению; матрицы $f(x),\ g(x)$ действительны и непрерывны. Предполагается, что при всех (x) система (1) управляема. Кроме того, функции $f(x),\ g(x)$ будем предполагать достаточно гладкими, чтобы через любые $(t_0, x_0) \in t_f \times \Omega_x$ проходило одно и только одно решение (1) $x(t, t_0, x_0)$.

Предположение 1. Вектор-функция $f(x)$ — непрерывная дифференцируемая по $x \in \Omega_x$, т.е. $f(\cdot) \in C^1(\Omega_x)$ и $g(\cdot) \in C^0(\Omega_x)$.

Предположение 2. Без потери общности положим, что условие $x = 0 \in \Omega_x$ есть точка равновесия системы при $u = 0$ так, что $f(0) = 0$ и $g(x) \neq 0,\ \forall x \in \Omega_x$.

При выполнении Предположений (используя SDC-линеаризацию [1]), исходная нелинейная система (1) может быть представлена в виде модели системы

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(x)x(t) + g(x)u(t),\ x(0) = x_0, \qquad (2)$$

которая имеет линейную структуру и параметрами, зависящими от состояния $A(x)x(t) = f(x)$.

Предположение 3. Пара $\langle A(x), g(x) \rangle$ поточечно управляема, т.е.

$$rank\left[g(x) \middle| A(x)g(x) \middle| A^2(x)g(x) \middle| A^3(x)g(x) \right] = 4,\ \ \forall x \in \Omega_x.$$

Для синтеза управления $u(t)$ ведем функционал качества

$$J(x,u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left\{ x^{\mathrm{T}}(t)\, Q\, x(t) + Ru^2(t) \right\} dt. \qquad (3)$$

Оптимальное управление определяется соотношением

$$u(t) = -R^{-1} g^{\mathrm{T}}(x)\, S(x)\, x(t), \qquad (4)$$

где матрица $S(x)$ — решение уравнения Риккати с параметрами, зависящими от состояния,

$$S(x)A(x) + A^{\mathrm{T}}(x)S(x) - S(x)g(x)R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x)S(x) + Q = 0. \qquad (5)$$

Основная проблема реализации управления вида (4) заключается в сложности нахождения матрицы $S(x)$, как решения уравнения (5).

Для получения реализуемого решения задачи управления нелинейным объектом вида (1) весь интервал управления разбивается на отдельные подинтервалы $\left[t_0, t_1\right], \left[t_1, t_2\right], \ldots, \left[t_{n-1}, t_f\right]$. Соответствующие значения состояния системы в точках $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_f$, т.е.

$$x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1,\ x(t_2) = x_2, \ldots, x(t_{n-1}) = x_{n-1}$$

используются при $A(x_0), A(x_1), A(x_2), \ldots, A(x_{n-1}),\ g(x_0), g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_{n-1})$ для вычисления положительно определенной матрицы с постоянными параметрами $S_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, t_{n-1}$: в соответствии с уравнением (5). Управление в каждом подинтервале будет иметь вид

$$u_i(t) = -R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x)S_i x(t). \qquad (6)$$

Система с (1) с управлениями (6) описывается уравнением:

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x) - g(x)R^{-1}g^{\mathrm{T}}(x)S_i x(t),\ x(t_0) = x_0. \qquad (7)$$

Стратегии введения препаратов при лечении рака

Предложенный метод организации управления нелинейными объектами опробован на решении задачи введения препаратов при лечении рака. При исследовании роста популяции раковых клеток и последующего развития их в состояние опухоли в ряде работ [2, 3] используется следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{dN(t)}{dt} = r_2 N(t)\left[1 - b_2 N(t)\right] - c_4 T(t)N(t) - a_3 N(t)M(t),\\
&\frac{dT(t)}{dt} = r_1 T(t)\left[1 - b_1 T(t)\right] - c_2 T(t)I(t) - c_3 T(t)N(t) - a_2 T(t)M(t),\\
&\frac{dI(t)}{dt} = s + \frac{\rho T(t)I(t)}{\alpha + T(t)} - d_1 I(t) - c_1 T(t)I(t) - a_1 I(t)M(t),\ \frac{dM(t)}{dt} = u(t) - d_2 M(t),
\end{aligned} \qquad (8)$$

где $N(t)$, $T(t)$, $I(t)$ — популяции нормальных, раковых и иммунных клеток соответственно, $M(t)$ — функция концентрации препарата в ткани или крови, $u(t)$ — величина дозы препарата.

Результаты синтеза управлений и проведенного математического моделирования системы показали эффективность полученного управления для решения задачи построения стратегии при лечении рака.

Литература

1. *Афанасьев В.Н.* Управление нелинейными неопределенными динамическими объектами. Управление нелинейными неопределенными динамическими объектами. М.: ЛЕНАРД. 2015.− 224 с.
2. *LaMont Cannon Jason M. Hernandez Ryan Zurakowski.* Modeling and analysis of gene-therapeutic combination chemotherapy for pancreatic cancer // 2011. Proc. 18 World Conf. IFAC, Milano (Italy). P. 14217−14222.
3. *L. G. dePillis, A. E. Radunskaya.* The dynamics of an optimally controlled tumor model: A case study", Mathematical and Computer Modelling, 37, 1221−1244, 2003.

СВЯЗЬ МЕЖДУ ПРОБЛЕМОЙ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ И ОБОБЩЕННЫМ РЕШЕНИЕМ УРАВНЕНИЯ БЕЛЛМАНА-АЙЗЕКСА

Проф. *Афанасьев В.Н.*

Проблема оптимального управления для класса нелинейных объектов с неконтролируемыми ограниченными возмущениями формулируется в ключе дифференциальной игры. Для задач с квадратическим функционалом качества задача поиска оптимальных управлений сводится к необходимости нахождения решений скалярного уравнения в частных производных Гамильтона-Якоби-Айзекса. Поиск решений этого уравнения в темпе функционирования объекта осуществляется с помощью процедур, полученных с использованием идеологии вязкого решения. Полученные результаты могут быть использованы при решении теоретических и прикладных задач, встречающихся в математике, механики, физики, биологии, химии, инженерных науках, управлении и навигации.

Введение

Успешная реализация полученных теоретических результатов в ряде задач связана с решением уравнений в частных производных первого порядка. Подобные уравнения в частных производных возникают при решении большого числа теоретических и прикладных задач в математике, механики, физике, биологии, химии, инженерных науках, управлении и т.д. Такими уравнениями являются уравнение Гамильтона-Якоби в теоретической механике [1], уравнение Беллмана в теории оптимального управления

[2], уравнении Айзекса [3], уравнении эйконала в геометрической оптике [4], предельные уравнения Брюгенса и Хопфа в газовой динамике и гидродинамике [5] и т.д.

Метод характеристик, предложенный в первой половине XIX в. О. Коши для решения краевых задач для таких уравнений, сводит интегрирование уравнений в частных производных первого порядка к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот метод основан на том, что график классического решения краевой задачи инвариантен относительно характеристик. Однако в случае нелинейного уравнения в частных производных гладкое решение существует лишь локально [6].

Обобщенному решению Гамильтона-Якоби и других типов уравнений в частных производных было обращено внимание многих математиков в 50–70-е гг. XX в. Разработанные методы в основном опирались на интегральные методы и интегральные свойства обобщенных решений.

Другая известная концепция обобщенного решения на базе идемпотентного анализа предложена в работах В. П. Маслова и его учеников [7]. С помощью этого подхода, линеаризующего выпуклые задачи, исследуются уравнения Гамильтона-Якоби с выпуклым гамильтонианом и их приложения к задачам математической физики.

В начале 1980-х гг., было введено понятие вязкостного решения, существование которого доказывалось с помощью метода исчезающей вязкости [8]. Метод развивается и в настоящее время, внимание исследователей привлекают аналитические, конструктивные и численные методы построения вязкостных решений [9, 10] и приложения теоретических результатов к решению различных прикладных задач.

Задачи оптимального управления и дифференциальные игры, так или иначе, связаны с поиском решений уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана, Айзекса. Для решения такого типа уравнений разработаны конструктивные и численные (в том числе и сеточные) методы [11]. Важным результатом теории минимаксных решений уравнений в частных производных первого порядка, лежащих в основе теории дифференциальных игр, является доказательство эквивалентности понятий минимаксного и вязкостного решений [12, 13]. Более того, в классе непрерывных функций верхние (нижние) решения эквивалентны вязкостным суперрешениям (субрешениям).

В рамках концепции минимаксного решения, имеющей свои истоки в теории позиционных дифференциальных игр [13], разработанной научной школой Н.Н. Красовского, базирующейся на минимаксных оценках и операциях, были доказаны теоремы существования и единственности, корректности и содержательности понятия минимаксного решения для различных типов краевых задач уравнений в частных производных первого порядка.

Несмотря на имеющиеся теоретические результаты в этой области, проблема решений уравнения Гамильтона-Якоби-Айзекса в задачах дифференциальных игр с нелинейными неопределенными динамическими объектами в темпе их функционирования по-прежнему сохраняется и актуальна.

1. Нелинейный оптимальный регулятор

1.1. *Постановка задачи.*

Пусть детерминированная нелинейная система описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x) + g_1(x)w(t) + g_2(x)u(t),\ x(t_0) = x_0, \qquad (1.1)$$
$$y(t) = Hx(t).$$

Здесь $x(\cdot) = \left\{x(t) \in R^n, t \in [t_0, T]\right\}$ состояние системы; $x(\cdot) \in \Omega_x$, $X_0 \in \Omega_x$ — множество возможных начальных условий системы; $y(t) \in R^m, m \le n$ — выход системы; $u(\cdot) = \left\{u(t) \in R^r, t \in [t_0, T]\right\}$, — управление; $w(t) \in R^k$ — ограниченное возмущение

$$|w_i(t)| \le \sigma_i, i = 1,...,k, \qquad (1.2)$$

$f(x),\ g_1(x),\ g_2(x)$ — непрерывные матрицы-функции.

Предположение 1.1. Вектор-функция $f(x)$ — непрерывная дифференцируемая по $x \in \Omega_x$, т.е. $f(\cdot) \in C^1(\Omega_x)$ и $g_1(\cdot),\ g_2(\cdot) \in C^0(\Omega_x)$. Кроме того, будем полагать, что функции $f(x),\ g_1(x),\ g_2(x)$ такие, что их любых $(t_0, x_0) \in R^+ \times \Omega_x$ проходило бы одно и только одно решение уравнения (1.1) $x(t, t_0, x_0)$ и был бы единственным соответствующий выход системы $y(t) = Hx(t, x_0)$.

Предположение 1.2. Положим, что условие $x = 0 \in \Omega_x$ есть точка равновесия системы при $u = 0,\ w = 0$ так, что $f(0) = 0$ и $g_1(x) \ne 0,\ g_2(x) \ne 0,\ \forall x \in \Omega_x$.

Рассматривая возмущение $w(t)$ как действие некоторого игрока противодействующему успешному выполнению задачи управления, сформулируем задачу управления в ключе дифференциальной игры двух игроков G_u и G_w.

На управляющие воздействия $u(t)$ и $w(t)$ наложены ограничения вида

$$\int_{t_0}^{T} \|u(t)\|_{R^*}^2 dt \le E_u, \quad \int_{t_0}^{T} \|w(t)\|_{P^*}^2 dt \le E_w, \quad E_u - E_w > 0 \qquad (1.3)$$

Величина $E_u - E_w > 0$ оценивает «стоимость» ресурсов, затрачиваемых на управление объектом (1.1) при возмущениях $w(\cdot)$.

Введем функционал качества дифференциальной игры

$$J(x(\cdot),u(\cdot),w(\cdot)) = K(x(T)) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} \left\{ y^{\mathrm{T}}(t)Q\,y(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t) - w^{\mathrm{T}}(t)Pw(t) \right\} dt. \qquad (1.4)$$

В функционале (1.2) $K(x(T)) > 0,\ x(T) \ne 0$, симметрическая матрица Q, по крайней мере, положительно полуопределенная, матрицы P и R — положительно определенные. Организация управлений $u(\cdot) \in U$ и $w(\cdot) \in W$ будет осуществляться с использованием принципа обратной связи по состоянию.

Предположение 1.3. Значения положительных чисел E_u и E_w, которые определяют ресурсы игроков G_u и G_w, при которых выполняются необходимые условия существования седловой точки дифференциальной игры, то есть существуют такие $u^0(t,x)$ и $w^0(t,x)$, что $J\left(x,u^0,w\right) \le J\left(x^0,u^0,w^0\right) \le J\left(x,u,w^0\right)$, зависит от значений матриц $R,\ P,\ g_1(x),\ g_2(x)$ и максимальных значений возмущений $\left|w_i(t)\right| \le \sigma_i, i = 1,\dots,k$.

1.2. Дифференциальная игра как проблема оптимального управления

Предположение 1.4. Пусть $f(x),\ g_1(x),\ g_2(x)$ достаточно гладкие функции такие, что функция $V(t,x)$, определенная как

$$V(s,x) \triangleq \inf_{u(\cdot)\in U} \sup_{w(\cdot)\in W} \left[K(x(T)) + \frac{1}{2}\int_{s}^{T} \left\{ y^{\mathrm{T}}(t)Q\,y(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t) - w^{\mathrm{T}}(t)Pw(t) \right\} dt \right], \qquad (1.5)$$

дифференцируемая функция при любых допустимых стратегиях игроков $G_w,\ G_u \in L_2(0,\infty)$.

Предположение 1.5. Функция $V(t,x)$, определенная в (1.5) локально липшицева в Ω_x.

В общем случае, значение назначаемой функции $V(t,x)$ есть решение задачи динамического программирования, связанное с дифференциальным уравнением первого порядка в частных производных Гамильтона-Якоби-Беллмана-Айзекса [3]

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}+\min_{u}\max_{w} H\left\{x,u,w,\frac{\partial V(t,x)}{\partial x},t\right\}=0,\ V(T,x(T))=K(x(T)), \tag{1.6}$$

где H — гамильтониан

$$H\left\{x,u,w,\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}.t\right\}=\frac{1}{2}\left\{x^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}QHx(t)+u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)-w^{\mathrm{T}}(t)Pw(t)\right\}+ \\ +\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\left\{f(x)+g_1(x)w(t)+g_2(x)u(t)\right\}. \tag{1.7}$$

Функция $H\left\{x,u,w,\partial V(t,x)/\partial x,t\right\}$ определена и непрерывна для $\left(x,u,w,t\right)\in R^n\times R^r\times R^k\times R,\ t\in[t_0,T]$. Более того, функция H предполагается дважды дифференцируема.

При выполнении Предположения 1.3, оптимальные управления $u^0(t,x)$ и $w^0(t,x)$ определяются соотношениями

$$u(t,x)=-R^{-1}g_2^{\mathrm{T}}(x)\left\{\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}},\ w(t,x)=P^{-1}g_1^{\mathrm{T}}(x)\left\{\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}}, \tag{1.8}$$

где вектор $\left\{\partial V(t,x)/\partial x\right\}^{\mathrm{T}}$ является решением уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана-Айзекса:

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}f(x)-\frac{1}{2}\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\Pi(x)\left\{\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}}+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}QHx(t)=0, \\ V(T,x(T))=K(x(T)). \tag{1.9}$$

Здесь $\Pi(x)=g_2(x)R^{-1}g_2^{\mathrm{T}}(x)-g_1(x)P^{-1}g_1^{\mathrm{T}}(x)$.

Исходная система (1.1) с управлениями (1.8) имеет вид

$$\frac{d}{dt}x(t)=f(x)-\Pi(x)\left\{\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}},\ x(t_0)=x_0, \\ y(t)=Hx(t). \tag{1.10}$$

Предположение 1.6. Пусть матрица

$$\Pi(x)=g_2(x)R^{-1}g_2^{\mathrm{T}}(x)-g_1(x)P^{-1}g_1^{\mathrm{T}}(x), \tag{1.11}$$

по крайней мере, положительно полуопределенная.

Теорема 1.1. Система (1.10) равномерно асимптотически устойчива относительно седловой точки, если и только если

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\Pi(x)\left\{\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}} \geq -\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}f(t,x),\ \forall x\neq 0.$$

где $\Pi(x)=g_2(x)R^{-1}g_2^{\mathrm{T}}(x)-g_1(x)P^{-1}g_1^{\mathrm{T}}(x)$ — по крайней мере, положительно полуопределенная матрица.

2. Решение уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана-Айзекса

Развитие выпуклого и негладкого анализа в 1970-е гг. позволило применить к исследованию обобщенных решений уравнений в частных производных новые результаты и методы [1, 2]. В начале 1980-х гг. М. Крэндалл и П. Л. Лионс ввели понятие вязкостного решения (viscosity solution) [8,9]. Опираясь на это понятие, введем в рассмотрение скалярную непрерывную функцию $\varphi^{\mathrm{T}}(t)x(t)$, такую, что

Определение 2.1. Верхним (нижним) решением уравнения

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}f(x)+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}QHx(t)-\frac{1}{2}\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\Pi(x)\left\{\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}}=0 \quad (2.1)$$

называется непрерывная функция $\varphi^{\mathrm{T}}(t)x(t)$, удовлетворяющая следующему условию: если разность функций $V(t,x)-\varphi^{\mathrm{T}}(t)x(t)$ достигает локального минимума (максимума) в точке $(t^*,x^*)\in\Omega$ и в этой точке функция $\varphi^{\mathrm{T}}(t)x(t)$ дифференцируема, то должно выполняться неравенство

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}f(x)+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}QHx(t)-\frac{1}{2}\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\Pi(x)\left\{\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}}\leq 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}f(x)+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}QHx(t)-\frac{1}{2}\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\Pi(x)\left\{\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}}\geq 0. \quad (2.3)$$

Определение 2.2. Решением $\varphi^{\mathrm{T}}(t)x(t)$ называется функция, которая одновременно является верхним и нижним решением, т.е. при выполнении следующего условия

$$V(t,x)=\varphi^{\mathrm{T}}(t)x(t). \quad (2.4)$$

Используя это определение, найдем уравнение для функции $\varphi^{\mathrm{T}}(t)x(t)$:

$$\left\{\frac{d\varphi(t)}{dt}\right\}^{\mathrm{T}} x(t) + \varphi^{\mathrm{T}}(t) f(x) - \frac{1}{2}\varphi^{\mathrm{T}}(t)\Pi(x)\varphi(t) + \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}QHx(t) = 0\,. \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) определяет динамическое соответствие функций $\varphi(t)$ и $x(t)$ при всех $t \in \left[t_0, T\right]$. Это обстоятельство, при выполнении Предположений 2.1. и 2.2, и, введя представление $f(t) = A(x)x(t)$ [15], при известном начальном состоянии $x(t_0)$ можно использовать для определения начальных условий $\varphi(t_0)$, т.е. начальных условия $\varphi^{\mathrm{T}}(t_0)x(t_0)$ для уравнения (2.5). Будем искать $\varphi(t_0)$ в виде

$$\varphi(t_0) = S(x(t_0))x(t_0)\,, \quad (2.6)$$

где положительно определенная матрица определяется решением матричного уравнения Риккати с постоянными параметрами

$$S(x(t_0))A(x(t_0)) + A^{\mathrm{T}}(x(t_0))S(x(t_0)) - S(x(t_0))\Pi(t_0)S(x(t_0)) + H^{\mathrm{T}}QH = 0\,. \quad (2.7)$$

Система (1.1) с управлениями

$$u(t,\varphi) = -R^{-1}g_2^T(x)\varphi(t),\; w(t,\varphi) = P^{-1}\, g_1^T(x)\varphi(t) \quad (2.8)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = f(x) - \Pi(x)\varphi(t),\; x(t_0) = x_0, \\ &y(t) = Hx(t). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Функционал качества (1.5) при управлениях (2.8) и назначении $K(x(T))$ в виде $K(x(T)) = 1/5\left[\varphi^{\mathrm{T}}(T)x(T)\right]$ принимает значение

$$J^0(x(\cdot),\varphi(\cdot)) = \frac{1}{2}\varphi^{\mathrm{T}}(t_0)x(t_0) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t_0)S(x(t_0))x(t_0)\,. \quad (2.10)$$

Отметим, что из (2.10) следует, что матрица $S(x(t_0))$ (решение уравнения Риккати (2.7)) — выбирается положительно определенной, т.е. $S(x(t_0)) \succ 0$.

Дифференциальное уравнение для вектора $\varphi(t)$ можно получить из уравнения (2.5), учитывая уже принятое представление вектора $f(x)$ в виде $f(x) = A(x)x(t)$:

$$\frac{d}{dt}\varphi(t)+A^{\mathrm{T}}(x)\varphi(t)+\frac{1}{2}H^{\mathrm{T}}QHx(t)=0,$$
$$\varphi(t_0)=\varphi_0. \tag{2.11}$$

Отметим, что пара дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}x(t)=A(x)x(t)-\Pi(x)\varphi(t),$$
$$\frac{d}{dt}\varphi(t)=-A^{\mathrm{T}}(x)\varphi(t)-\frac{1}{2}H^{\mathrm{T}}QHx(t)$$

образуют каноническую систему, связанную с основной задачей.

Теорема 2.1. Решением $V(t,x)=\varphi^{\mathrm{T}}(t)x(t)$ уравнения

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}f(x)+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}QHx(t)-\frac{1}{2}\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\Pi(x)\left\{\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}}=0$$

есть непрерывная функция $\varphi^{\mathrm{T}}(t)x(t)$, удовлетворяющая решению уравнения

$$\left\{\frac{d\varphi(t)}{dt}\right\}^{\mathrm{T}}x(t)+\varphi^{\mathrm{T}}(t)f(x)-\frac{1}{2}\varphi^{\mathrm{T}}(t)\Pi(x)\varphi(t)+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}QHx(t)=0,$$
$$\varphi^{\mathrm{T}}(t_0)x(t_0)=\varphi_0^{T}x_0,$$

где вектор $x(t)$ отвечает решению уравнения

$$\frac{d}{dt}x(t)=f(x)-\Pi(x)\varphi(t),\ x(t_0)=x_0,$$
$$y(t)=Hx(t).$$

3. Стационарный случай. Гарантирующее управление

Функционал качества для такой задачи имеет вид

$$J(x(\cdot),u(\cdot),w(\cdot))=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^T\left\{y^{\mathrm{T}}(t)Qy(t)+u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)-w^{\mathrm{T}}(t)Pw(t)\right\}dt. \tag{3.1}$$

Теорема 4.1. Система (1.1) с управлениями

$$u(t,x)=-R^{-1}g_2^{\mathrm{T}}(x)\left\{\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}},\ w(t,x)=P^{-1}g_1^{\mathrm{T}}(x)\left\{\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}}, \tag{3.2}$$

где вектор $\partial V(x)/\partial x$ определяется решением уравнения Гамильтона-Якоби-Айзекса

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) - \frac{1}{2}\frac{\partial V(x)}{\partial x} \Pi(x)\left\{\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}}(t) H^{\mathrm{T}} Q H x(t) = 0, \quad (3.3)$$

равномерно асимптотически устойчива, если и только если

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V(x)}{\partial x} \Pi(x)\left\{\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}} \geq \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(t,x),\ \forall x \neq 0, \quad (3.4)$$

где $\Pi(x) = g_2(x)R^{-1}g_2^{\mathrm{T}}(x) - g_1(x)P^{-1}g_1^{\mathrm{T}}(x)$ — по крайней мере, положительно полуопределенная матрица.

Для определения свойств матрицы $\Pi(x)$ вернемся к уравнению (3.3). Очевидно, что

$$\frac{1}{2}\frac{\partial V(x)}{\partial x} \Pi(x)\left\{\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}} \geq \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x),$$

так как $x^{\mathrm{T}}(t) H^{\mathrm{T}} Q H x(t) \geq 0$. Откуда следует, что матрица $\Pi(x)$, по крайней мере, положительно полуопределенная.

Таким образом, условие успешного выполнения задачи дифференциальной игры игроком G_u в рассматриваемом случае, т.е. выполнения условия $J\left(x,u^0,w\right) \leq J\left(x^0,u^0,w^0\right)$, определяется положительной, по крайней мере, полуопределенностью матрицы $\Pi(x)$. Обеспечить выполнения условия $\Pi(x) \geq 0$ можно за счет соответствующих назначений положительно определенных матриц R и P [16]. Учитывая (1.3) и (1.11), будем иметь

$$\begin{aligned}&\int_0^T \|u(t)\|_R^2 dt - \int_0^T \|w(t)\|_P^2 dt = \int_0^T \varphi^{\mathrm{T}}(t)\left[g_2(x)R^{-1}g_2^{\mathrm{T}}(x) - g_1(x)P^{-1}g_1^{\mathrm{T}}(x)\right]\varphi(t)dt = \\ &= \int_0^T \varphi^{\mathrm{T}}(t)\Pi(x)\varphi(t)dt = E_u - E_w > 0.\end{aligned} \quad (3.5)$$

Из последнего соотношения следует:

$$E_w = \int_0^T \|w(t)\|_P^2 dt = \int_0^T \varphi^{\mathrm{T}}(t) g_1(x) P^{-1} g_1^{\mathrm{T}}(x)\varphi(t)dt.$$

Назначение положительно определенной диагональной матрицы штрафа P следует связать с известными ограничениями, наложенными на возмущения $\left\{ w \in R^k : \left| w_i(t) \right| \le \sigma_i,\ i = 1,\ldots,k \right\}$. Назначим эту матрицу в виде $P = P(\sigma)$, где $p_{ii} = 1/\sigma_i$, т.е.

$$E_w = \int_0^T \left\| w(t) \right\|_P^2 dt = \int_0^T \varphi^{\mathrm{T}}(t) g_1(x) \left[P(\sigma) \right]^{-1} g_1^{\mathrm{T}}(x) \varphi(t) dt .$$

Условие выполнения предположения о положительной, по крайней мере, полуопределнности матрицы $\Pi(x) = g_2(x) R^{-1} g_2^{\mathrm{T}}(x) - g_1(x) \left[P(\sigma) \right]^{-1} g_1^{\mathrm{T}}(x)$ можно обеспечить соответствующим выбором матрицы R. Таким образом, будет выполняться условие (3.5).

Заключение

Проблема оптимального управления для класса нелинейных объектов с неконтролируемыми ограниченными возмущениями формулируется в ключе дифференциальной игры. Хорошо известно, что поиск оптимальных управлений в таких задачах, приводит к необходимости решения нелинейного уравнения в частных производных первого порядка (УЧП) — уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана-Айзекса. В отличие от классического метода характеристик, который часто используется для поиска решений УЧП, в работе предложен метод, представления исходного УЧП в виде специальной функции, которая объединяет уравнения канонической системы, связанной с основной задачей. Для класса нелинейных систем, представляемых системами с линейной структурой и параметрами, зависящими от состояния, для канонической системы найдены краевые условия на левом конце.

Рассмотрена так же задача минимаксного решения управления нелинейными объектами с неконтролируемыми ограниченными возмущениями. Получены условия существования минимакса в виде требований к выбору матриц штрафа функционала качества. Использование такого функционала приводит к задаче синтез гарантирующего управления.

Литература

1. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. 3-е изд., перераб. И доп. — М.: Наука, 1989. − 472 с.
2. *Bellman R.* Dynamic programming. − Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1957.
3. *Isaacs R.* Differential Games. John Wiley and Sons. New York. 1965.
4. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. Т. 2. − М.: Мир, 1964. − 830 с.
5. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. − М.: Наука, 1978. − 687 с.
6. Самарский А.А. Введение в численные методы // Наука, 1982. − 269 с.

7. *Колокольцов В. Н., Маслов В. П.* Идемпотентный анализ и его применения в оптимальном управлении. М.: Наука, 1994. − 144 с.
8. *Crandall M. G., Ishii H., Lions P. L.* User's quite to viscosity solutions of second order partial differential equation // Bull. Amer. Math. Soc.− 1992.−27.− С. 1–67.
9. *Cacace S., Cristini E,. Falcone M.* A Local Ordered Upwind Method for Hamilton-Jacobi and Isaacs Equations. 18th World Conf. IFAC, Milano, Italy.2011.6800-6805 P.
10. *Субботин А. И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. − Москва-Ижевск.: Институт компьютерных исследований, 2003. − 336 с.
11. *Тарасьев А. М., Успенский А. А., Ушаков В. Н.* Аппроксимационные схемы и конечно-разностные операторы для построения обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби // Изв. РАН. Техн. Киберн. −1994. № 3. С. 173–185.
12. *Субботин А. И.* Минимаксные неравенства и уравнение Гамильтона-Якоби. − М.: Наука. 1991.
13. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. − 420 с.
14. *Субботин А. И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. − Москва-Ижевск.: Институт компьютерных исследований, 2003. − 336 с.
15. *Афанасьев В.Н.* Управление неопределенными динамическими объектами. − М.: Наука, 2008. − 208 с.
16. *Красовский А.А.* Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирования. − М.: Наука. 1973. − 560 с.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК РАДИОСИГНАЛА, ПОЛУЧЕННОГО С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ АППАРАТУРЫ КОГЕРЕНТНОГО ПРИЁМА НАЗЕМНОГО ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО КОМПЛЕКСА

Белов С.Ю.

В работе рассматривается задача дистанционной диагностики «шероховатой» земной поверхности и диэлектрических подповерхностных структур в КВ-диапазоне [1]. Выбор КВ-диапазона позволяет учитывать и подповерхностный слой (толщины порядка длины волны падающего излучения), поскольку параметр рассеяния формируется также и неоднородностями диэлектрической проницаемости подповерхностных структур [12]. При этом в качестве параметра, характеризующего рассеивающую способность радиоволн земной поверхности, используется соотношение сигнал/шум β [8]. Идея метода определения этого параметра заключается в том, что, располагая синхронной информацией о волне, отражённой от ионосферы и о волне, отражённой от земли и ионосферы (или прошедшей ионосферу дважды при зондировании со спутника), возможно извлекать информацию о параметре рассеяния [4, 5, 10, 11].

Стандартный некогерентный R2-метод:

$$\frac{\overline{R^2}}{\left(\overline{R}\right)^2} = f\left(\beta_{R2}\right) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\left(1+\beta_{R2}^2\right)\cdot \exp\left(\beta_{R2}^2\right)}{\left[\left(1+\beta_{R2}^2\right)\cdot I_0\left(\beta_{R2}^2/2\right)+\beta_{R2}^2 \cdot I_1\left(\beta_{R2}^2/2\right)\right]^2}.$$

Когерентный E4-метод по эксцессу γE4 квадратур:

$$\gamma_{E4}\left(\beta_{E4}\right) = \frac{\overline{E_m^4}}{\left(\overline{E_m^2}\right)^2} - 3 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\beta_{E4}^4}{\left(1+\beta_{E4}^2\right)^2}; \quad m=c,s.$$

Новый R4-метод по эксцессу γR4 огибающей:

$$\gamma_{R4}\left(\beta_{R4}\right) = \frac{\overline{R^4}}{\left(\overline{R^2}\right)^2} - 3 = \gamma_{R4}\left(\beta_{R4}\right) = -1 - \frac{\beta_{R4}^4}{\left(1+\beta_{R4}^2\right)^2}.$$

Сопоставление приведённых методов в смысле относительных погрешностей, допускаемых при вычислении βK, обусловленных видом функциональных зависимостей, приведено на рис. 1.

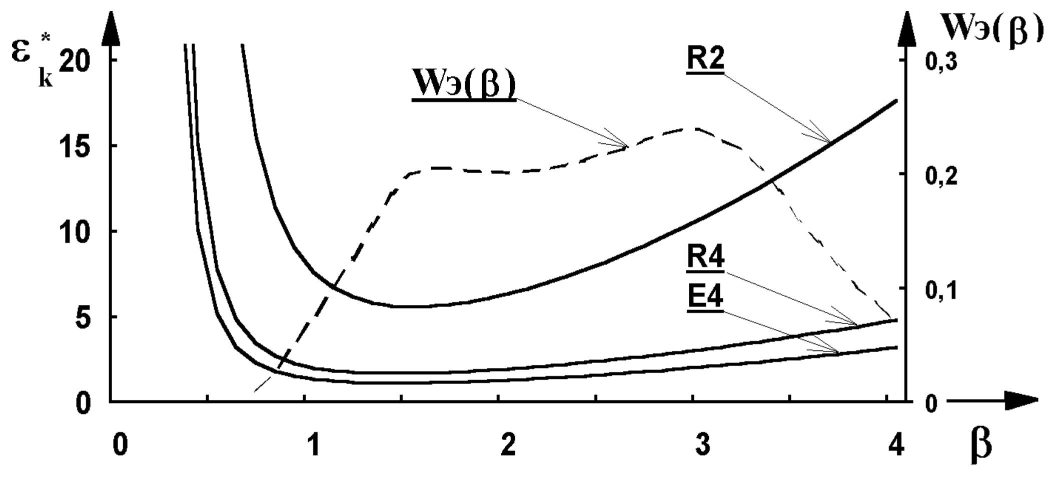


Рис. 1. Графики зависимостей ε_K^*, K = R2, R4, E4 аналитических погрешностей оценки параметра β (сплошные линии) и экспериментальное распределение WЭ(β) (пунктир).

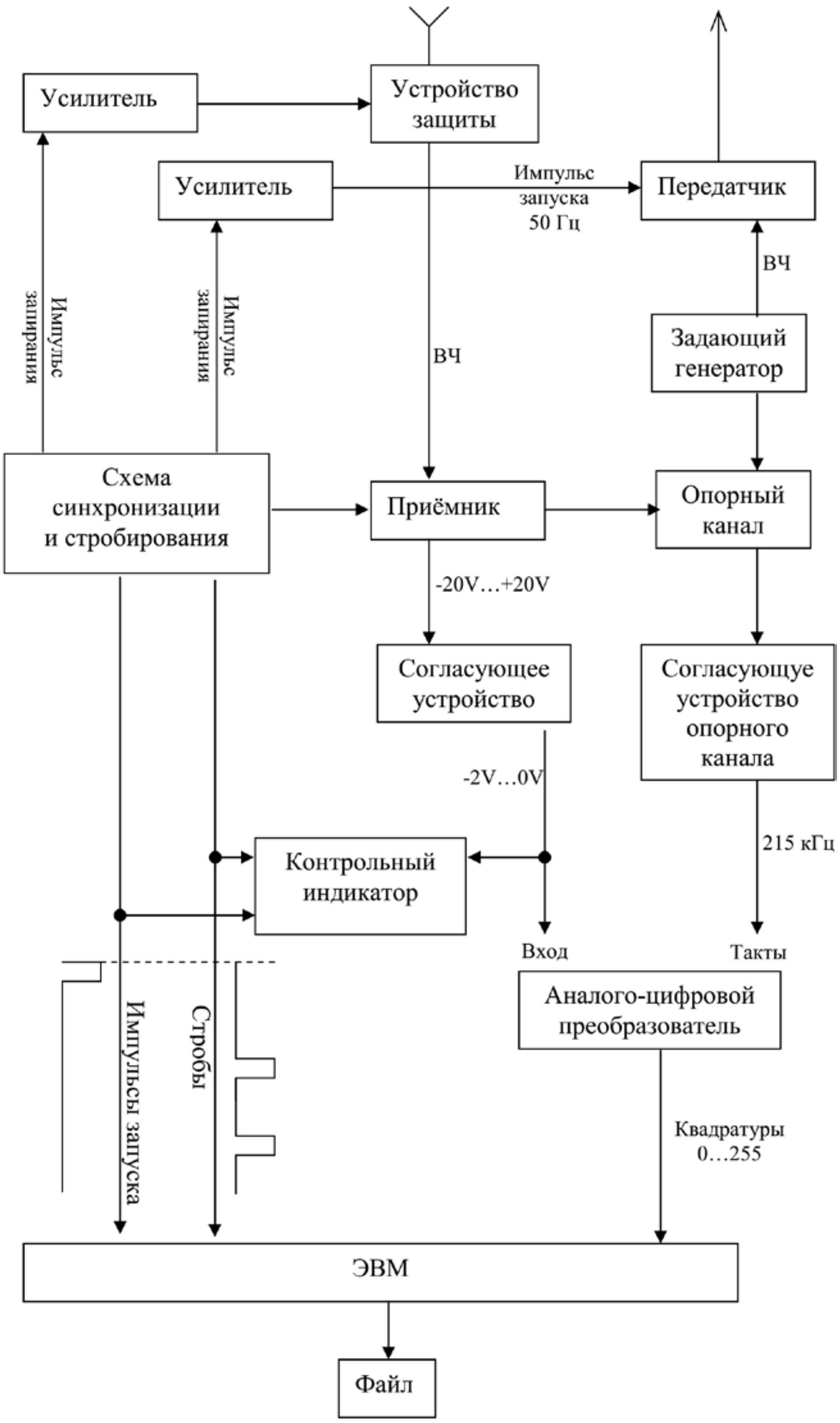


Рис. 2. Функциональная схема экспериментальной установки Наземного Измерительного Комплекса.

В работе представлена разработанная и сконструированная автором экспериментальная аппаратура наземного измерительного комплекса установки когерентного зондирования рассеивающей способности земной поверхности в коротковолновом диапазоне радиоволн для оценки параметра сигнал/шум β. Для получения необходимых экспериментальных данных используется импульсный метод когерентного приёма [7]. Этот метод позволяет регистрировать низкочастотные квадратурные составляющие ионосферного сигнала Ec(t), Es(t). По ним возможно определение огибающей R(t) и фазы Ф(t), то есть функции модуляции сигнала. Для того чтобы применить аппаратуру когерентного приёма к исследованию кратных ионосферных отражений, необходимо было обеспечить возможность выделения и одновременной регистрации параметров, относящихся к сигналам разной кратности. В установке используется схема регистрации низкочастотных квадратурных компонент ионосферного сигнала Ec(t), Es(t). Модернизация обеспечила регистрацию на ЭВМ упомянутых параметров сигнала одновременно для сигналов различной кратности. Это достигнуто применением специальной многоканальной системы стробирования и регистрации. На рис. 2 представлена структурная схема установки со схемой регистрации и стробирования. Установка позволяет осуществлять одновременную регистрацию параметров кратных ионосферных отражений, причём даже с использованием ЭВМ с не очень высоким быстродействием за счёт применения оригинальных алгоритмов оптимизации: патент [2].

Заключение. Предложен новый некогерентный метод оценки параметра сигнал/шум [3]. Выполнен сравнительный анализ и показано, что по аналитической (относительной) точности определения этого параметра новый метод на порядок превосходит широко используемый стандартный [6]. Анализ аналитических погрешностей оценки параметра βK позволил рекомендовать метод R4 вместо стандартного R2 [9]. При этом достаточно высокая аналитическая (относительная) точность оценки параметра βK может быть достигнута с помощью некогерентной аппаратуры, используя метод R4.

Литература

1. Белов С.Ю. Экспериментальное исследование характеристик когерентной и некогерентной обработки информации при дистанционном зондировании атмосферы и “шероховатой” земной поверхности в коротковолновом диапазоне радиоволн. // «Известия высших учебных заведений. Физика», ISSN 0021-3411, т. 59, № 12–3, 2016, с. 121–124.
2. Белов С.Ю. Программа регистрации квадратурных компонент n-кратного отражённого от земной поверхности радиосигнала. Свидетельство о регистрации права на программное обеспечение № RU.2016612172 от 19.02.2016 г.
3. Белов С.Ю., Белова И.Н. Математические методы определения характеристик рассеивающей способности отражающего экрана когерентным и некогерентным способами. // Математика, физика, информатика и их приложения в науке и образовании. М.: МТУ (МИРЭА), ISBN 978-5-7339-1374-2, 2016, с. 155–157.
4. Belov S.Yu. The analysis of monitoring data of the parameter scattering power the earth's surface in the short-wave range of radio waves. // Data Intensive System Analysis for Geohazard Studies, Geoinformatics research pa-

pers, eISSN: 2308-5983, Vol. 4, No. 2, BS4002, doi:10.2205/2016BS08Sochi, 2016, p. 50.
5. Belov S.Yu., Belova I.N., Falomeev S.D. Monitoring of coastal ecosystems by method of remote sensing in the short-wave range of radio waves. // Managing Risks to Coastal Regions and Communities in a Changing World. ISBN 978-5-369-01628-2, doi: 10.21610/conferencearticle_58b4316d2a67c, St. Petersburg, 2016.
6. Belov S.Yu., Belova I.N. The analysis of methods of determination the scattering parameter of the inhomogeneous fluctuating ionospheric screen. // Atmosphere, Ionosphere, Safety. Kaliningrad, ISBN 978-5-9971-0412-2, 2016, pp. 435–440.
7. Белов С.Ю., Белова И.Н. Функциональная схема экспериментальной аппаратуры когерентного приёма в задачах мониторинга поверхности земли методом дистанционного зондирования в коротковолновом диапазоне радиоволн. // Прикладные аспекты геологии, геофизики и геоэкологии с использованием современных информационных технологий, Майкоп, ISBN 978-5-906696-22-9, 2015, с. 53–58.
8. Белов С.Ю., Белова И.Н. Исследование характеристик когерентной и некогерентной обработки информации при дистанционном зондировании атмосферы и “шероховатой” земной поверхности в коротковолновом диапазоне радиоволн. // Распространение радиоволн, Томск, ISBN 978-5-86889-736-8, 2016, т. 3, с. 94–97.
9. Белов С.Ю. О способах определения параметра сигнал/шум при отражении радиоволн от границы раздела двух сред в КВ-диапазоне. // Комплексные исследования морей России: оперативная океанография и экспедиционные исследования. Севастополь: ФГБУН МГИ, ISBN 978-5-9908460-0-5, 2016, с. 528–533.
10. Белов С.Ю. Космический мониторинг характеристик прибрежных территорий для обеспечения экологической безопасности зондированием в коротковолновом диапазоне радиоволн. // Экология. Экономика. Информатика. Азовское море, Керченский пролив и предпроливные зоны в Чёрном море: проблемы управления прибрежными территориями для обеспечения экологической безопасности и рационального природопользования, Ростов-на-Дону: ЮФУ, ISBN 978-5-9275-2055-8, 2016, с. 27–41.
11. Белов С.Ю. Дистанционные методы наблюдений и технологии мониторинга природно-техногенных опасных процессов в коротковолновом диапазоне радиоволн. // Природные катастрофы: изучение, мониторинг, прогноз. Южно-Сахалинск: ИМГиГ ДВО РАН ISBN: 978-5-7442-1590-3, 2016, с. 172–175.
12. Belov S.Yu., Belova I.N. Methods of obtaining data on the characteristics of superficial and subsurface structures of the earth by remote sensing in the short-wave range of radio waves. // IGCP 610 project “From the Caspian to Mediterranean: Environmental Change and Human Response during the Quaternary” (2013-2017), GNAS Tbilisi, Georgia, ISSN 978-9941-0-9178-0, 2016, pp. 26–29.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛЯ ВОЛНОВОДА В ОКРЕСТНОСТИ РЕБРА МЕТАЛЛО-ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО КЛИНА

Проф. *Боголюбов А.Н.*, доц. *Могилевский И.Е.*

В настоящее время весьма актуальна задача о расчете электромагнитного поля в волноведущих системах при наличии ребер на их границах и сложного заполнения. Известно, что наличие ребер на границе и разрывов диэлектрической проницаемости приводит к появлению особенностей у электромагнитного поля в окрестности особой точки границы или неоднородности заполнения [1, 4]. Одним из способов преодоления этих проблем является выделение особенности решения в явном виде, то есть построение асимптотики электромагнитного поля в окрестности ребра в волноводе [4]. При этом существенно используются результаты по асимптотике решения эллиптических краевых задач, представленные в работе В.А. Кондратьева [3], а также С.А. Назарова и Б.А. Пламеневского [2].

Рассматривается металлический радиоволновод с диэлектрическим заполнением, неоднородным в поперечном сечении. Предполагается, что электромагнитное поле волновода имеет гармоническую зависимость от времени вида $e^{-i\omega t}$. Боковая поверхность считается идеально проводящей, волновод представляет собой цилиндр $Q=\{(x,y)\in\Omega, z\in(-\infty,+\infty)\}$. Магнитная проницаемость среды, заполняющей волновод, равна $\mu\equiv 1$. Диэлектрическая проницаемость ε — кусочно-непрерывная скалярная вещественная функция. Исследуется случай, когда граница волновода имеет входящее ребро с двугранным углом ω_0. Через ребро проходит плоскость разрыва диэлектрической проницаемости, составляющая двугранный угол β с границей волновода.

При указанных условиях для компонент электромагнитного поля в работе [5] получена следующая математическая постановка задачи (для собственных векторов)

$$\begin{aligned} &-\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\ H_{\perp} - k^2\varepsilon \mathrm{rot}\ E_z = -\gamma^2 H_{\perp}, \\ &-ik\ \mathrm{rot}\varepsilon H_{\perp} - \mathrm{div}\varepsilon \mathrm{grad}\ E_z = -\gamma^2 \varepsilon E_z, \end{aligned} \tag{1}$$

где $k=\dfrac{\omega}{c}$ — волновой вектор, γ— спектральный параметр; предполагается, что все функции имеют зависимость от z вида $e^{i\gamma z}$. Граничные условия и условия сопряжения имеют вид

$$\left(\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}\right)\Big|_{\partial\Omega}=0,\ E_z\Big|_{\partial\Omega}=0,\ \left[\left(\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}\right)\right]\Big|_C=0,\ \left[E_z\right]\Big|_C=0,\ \left(\mathbf{H}\times\mathbf{n}\right)\Big|_C=0,$$
$$\left[\operatorname{div}H_\perp\right]\Big|_C=0,\ \left[\varepsilon\left(\operatorname{grad}E_z+ik\left(\mathbf{H}\times\mathbf{i}_z\right)\right)\cdot\mathbf{n}\right]\Big|_C=0. \tag{2}$$

Здесь использованы следующие обозначения: $H_\perp=\left\{H_x,H_y\right\}=\left\{H_r,H_\varphi\right\}$, C — линия разрыва диэлектрической проницаемости, $\mathbf{n}$ — нормаль к границе области или линии разрыва,

$$\operatorname{div}H_\perp=\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y},\ \operatorname{rot}H_\perp=\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y},$$
$$\operatorname{grad}E_z=\mathbf{i}_x\frac{\partial E_z}{\partial x}+\mathbf{i}_y\frac{\partial E_z}{\partial y},\ \operatorname{rot}E_z=\mathbf{i}_x\frac{\partial E_z}{\partial y}-\mathbf{i}_y\frac{\partial E_z}{\partial x}. \tag{3}$$

В работе [5] рассмотрен вопрос о поиске слабых решений задачи (1)-(2). Показано, что данная задача порождает ограниченный оператор $T:\left(L_2\left(\Omega\right)\right)^3\to W$ компактный в подпространстве V гильбертова пространства W, выделяемом дополнительным условием

$$rotH_\perp=-ik\varepsilon E_z, \tag{4}$$

которое понимается в смысле обобщенных функций. Таким образом, спектр задачи (1)–(2), рассматриваемой в указанном пространстве, состоит из счетного множества возрастающих по модулю собственных значений.

Чтобы провести исследование поведения электромагнитного поля в окрестности ребра границы волновода, через которое проходит плоскость разрыва диэлектрической проницаемости, сначала данная задача рассматривается на всей плоскости вместо области Ω. В дальнейшем использование срезающей функции позволяет свести задачу в конечной области к задаче на всей плоскости. Дополнительно предполагается, что диэлектрическая проницаемость является кусочно-постоянной (по крайней мере, в окрестности ребра). Для удобства описания вводится полярная система координат с центром на ребре волновода.

Уравнение для компоненты электрического поля E_z принимает вид:

$$\operatorname{grad}\,\operatorname{div}E_z=-\frac{2}{r^2}\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}\frac{\partial u}{\partial\varphi}(r,\beta)\delta(\varphi-\beta)+\gamma^2E_z-\frac{ik}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)+\frac{ik}{r}\frac{\partial H_r}{\partial\varphi}. \tag{5}$$

Обозначим $\alpha=\dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}$. Для компонент H_r и H_φ магнитного поля получается система

$$\begin{gathered}
r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_r)\right)+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}(rH_\varphi)\right)=-k^2\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial \varphi}+\gamma^2(rH_r),\\
\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}(rH_r)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}(rH_\varphi)=-k^2\varepsilon r\frac{\partial E_z}{\partial r}+\gamma^2(rH_\varphi).
\end{gathered} \tag{6}$$

Тем же методом, что применен в работе [1] для диэлектрического ребра, удается получить следующее представление электрического поля в окрестности металло-диэлектрического ребра:

$$E_z(r,\varphi)=\chi\sum_{-\delta<\nu_k<1}C_k r^{\nu_k}\left\{\begin{aligned}&\cos\left[\nu_k\left(\beta-\omega_0+\varphi\right)\right]-\\&\qquad-\cos\left[\nu_k\left(\left|\beta-\varphi\right|-\omega_0\right)\right]\end{aligned}\right\}+\Re(r,\varphi).$$

где ν_k — решения уравнения $\alpha\sin\left[\nu_k\left(2\beta-\omega_0\right)\right]+\sin\left(\nu_k\omega_0\right)=0.$

(кроме $\nu_k=0$), $\chi(r)=\begin{cases}1, & r\le d/2,\\ 0, & r>d,\end{cases}$ $\chi(r)\in C^\infty$ — срезающая функция, $\Re(r,\varphi)$ — гладкая часть решения, для которой получена оценка в соответствующей норме.

Главную особенность имеет именно электрическое поле. Сама продольная компонента ограничена в окрестности угловой точки, а ее производная имеет степенную особенность, причем вид функции, описывающей особенность, и показатели степени соответствуют полученным ранее для скалярного случая.

При построении численного решения знание точного вида сингулярности позволяет в пространство пробных функций ввести функции, имеющие сингулярности данного вида, и тем самым точно аппроксимировать сингулярную часть решения. Это дает возможность получить скорость сходимости приближенного решения к точному, соответствующую гладкому случаю.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (проекты 15-01-03524 и 16-01-00690).

Литература

1. Боголюбов А.Н., Могилевский И.Е., Свешников А.Г. Асимптотическое представление электромагнитного поля диэлектрического волновода в окрестности угловой точки линии разрыва диэлектрической проницаемости, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015 Т. 55, № 3, С. 446–459.
2. Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. М.: Наука — 1991.

3. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками, Труды Московского Математического Общества, Т. 16, 1967, С. 227–313.
4. Боголюбов А.Н., Делицын А.Л., Могилевский И.Е., Свешников А.Г. Особенности нормальных волн неоднородного волновода с входящими ребрами // Радиотехника и электроника. 2003. Т. 48. № 7. С. 787–794.
5. Делицын А.Л. О проблеме применения метода конечных элементов к задаче вычисления мод диэлектрических волноводов. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т.39, № 2. С. 315–322.

АВТОМАТИЗАЦИЯ ПЛАНИРОВАНИЯ ДЕЙСТВИЙ ГРУППЫ МОБИЛЬНЫХ РОБОТОВ

Студ. *Бузиков М.Э.* акад. РАН *Васильев С.Н.*
м. н. с. *Морозов Н.Ю.*

В мире наблюдается тенденция расширения работ по созданию интеллектуальных систем управления, в т.ч. транспортно-логистическими системами (ТЛС) с координацией и групповым взаимодействием автономных транспортно- погрузочных средств. В частности, активно развивается подход Model Checking [1], предполагающий спецификацию требований к поведению объектов управления на языке той или иной логики с последующим отысканием автоматной модели, удовлетворяющей спецификации. В отличие от этого, в докладе предлагается метод автоматического планирования действий на основе нескольких взаимодействующих логических исчислений в немонотонной логике позитивно-образованных формул (ПОФ) [2]. Языковые и дедуктивные особенности этой логики позволяют создавать программные средства с удобным (не обязательно авторским) сопровождением, в т.ч. на модернизационной фазе их жизненного цикла.

В работе рассматривается двухуровневая система управления обслуживанием поступающих в ТЛС заявок. Верхний уровень представлен агентом-координатором (далее – координатор). Выполнение планов исполнителями обеспечивает удовлетворение заявок, а роль координатора заключается в составлении планов для агентов-исполнителей (далее — исполнители). Составление планов происходит с помощью логического вывода. Координатор руководствуется некоторыми эвристиками при распределении между исполнителями сгенерированных планов как заданий, исполнение которых предполагает взаимодействие между исполнителями.

Нижний уровень системы представлен исполнителями. Исполнители получают планы от координатора, которые могут допускать неоднозначность решения некоторых промежуточных подзадач, что возлагает на исполнителя обязанность планирования собственных действий по их решению. Горизонтальные взаимодействия нижнего уровня представлены в модели планами оказания помощи. Возможны ситуации, когда исполнитель не в силах справиться с подзадачей в одиночку. Тогда другому исполнителю поручается задание в виде плана оказания помощи.

Работа ТЛС представлена на примере склада, который принимает заявки на прием и выдачу товаров разных категорий. Каждая категория имеет свою востребованность, характеризуемую интенсивностями входного потока заявок на хранение товара и потока заявок на выдачу товара. Роль обслуживающих устройств играют исполнители. Товары хранятся на двухъярусных стеллажах. Каждый стеллаж имеет ограниченную вместимость. Второй ярус может использоваться только при коллективном взаимодействии двух исполнителей. Координатор строит планы и поручает их исполнителям в соответствии с текущей обстановкой на складе.

В работе используются логические методы на обоих уровнях управления: на верхнем уровне — в генераторе командного управления, т.е. планов от координатора, на нижнем уровне — в генераторе собственных решений исполнителей. Часть базы знаний координатора описывает текущую обстановку на складе, а остальная часть отвечает за вывод планов. В базе знаний каждого исполнителя содержатся правила правостороннего двухполосного движения для бесстолкновительного перемещения из одного пункта в другой. Показания сенсора исполнителя представляют собой предикаты, описывающие локальную обстановку вокруг исполнителя для принятия им (автономно от координатора) решения о необходимости торможения и т.п.

Используемые средства представления и обработки знаний дополняются эвристиками как стратегиями поиска выводов. В работе сравниваются два эвристических подхода к размещению грузов на складе. Трудности математического описания возникающих сложных случайных процессов на первых порах заставляют проводить анализ качества системы путем обработки статистических данных вместо оптимизации управления на модели динамики функционирования объекта управления.

Техническая реализация баз знаний и исчисления J осуществлена с помощью языка программирования Python. Все абстракции, связанные с логическим языком, вынесены в отдельную библиотеку. Библиотека предоставляет средства создания различных структурных единиц языка ПОФ: терм, предикат, типовый квантор и т.д. В библиотеке реализованы алгоритмы поиска ответных подстановок для конкретных вопросов к базе знаний, правило ответов и процедуры логического вывода. Имеется ряд средств парсинга исходных формул с языка TeX, а также визуализации промежуточных выкладок работы алгоритмов как в терминах ПОФ на языке TeX, так и на естественном языке. Библиотека выполнена в соответствии с парадигмой объектно-ориентированного программирования, что позволяет импортировать библиотеку как в модели, требующие увеличения средств выразительности языка ПОФ, так и в модели, подразумевающие использование только готовых инструментов. Модель ТЛС использует элементы библиотеки при всех манипуляциях с ПОФ. С каждым исполнителем связана ПОФ, формирующая поведение при передвижении, и сенсор, актуализирующий информацию в ПОФ этого агента. С дорогами склада ассоциирован ориентированный граф, который задает правостороннее дорожное движение. Вдоль ребер этого графа перемещаются исполнители, выполняя поставленный перед ними план. Для поиска кратчайшего пути используется алгоритм Дейкстры.

Целью численного эксперимента является сравнение двух моделей поведения координатора. В первом случае агент не использует информацию о разнице приоритетов грузов: размещение по полкам происходит без учета категории товара. Во втором случае агент поручает не размещать мало востребованные товары на ближайших к месту выгрузки полках, а оставить их для часть востребуемых.

Выполнена визуализация процесса обслуживания заявок анимированным набором геометрических примитивов, изображающих исполнителей, склад и товары.

Как показали эксперименты, ТЛС успешно справляется с обслуживанием возникающих заявок. Благодаря особенностям языка ПОФ, логика алгоритмов функционирования элементов системы, наглядна для пользователя. Особая структура ПОФ обеспечивает содержательное восприятие формульных структур в процессе вывода. Это позволяет эвристически варьировать ПОФ, исходя из тех или иных соображений оптимальности, и следить за показателями качества системы. Например, изменение или ввод новых правил движения, не нуждающихся в расширении прежнего набора предикатов (сигнатуры) логической модели ТЛС, легко осуществимы благодаря семантической наглядности текстов модели. Если автоматизировать процесс перевода ПОФ на естественный язык, то можно ожидать от программного обеспечения не только желаемой функциональности, но и его отчуждаемость и возможность задействования экспертов, которые смогут достаточно просто анализировать оправданность действий агентов и вносить необходимые коррективы в их поведение.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 16-29-04415).

Литература

1. Lomuscio A., Michaliszyn J. Verifying Multi-Agent Systems by Model Checking Three-valued Abstractions // Proc. of the 14th Intern. Conf. on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS'2015). – Istanbul, 2015. – P. 189–198.

2. Васильев С.Н., Давыдов А.В. Интеллектное управление на основе логических выводов // Колл. моногр. под ред. С.Н. Васильева "Интеллектуальные системы управления". – М.: Машиностроение. 2010. 544 с.

НЕМОНОТОННОСТЬ СХЕМЫ ЙЕ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ГРАНИЦ РАЗДЕЛА МЕЖДУ ДИЭЛЕКТРИКАМИ

асп. *Домбровская Ж.О.*, проф. *Боголюбов А.Н.*

Метод конечных разностей во временной области (FDTD — finite-difference time-domain) до сих пор является одним из популярнейших численных алгоритмов для решения задач фотоники и плазмоники. Он основан на дискретизации вихревых уравнений Максвелла по конечно-разностной схеме Йе, теоретический порядок точности которой в случае однородной среды равен $p_{th} = 2$. Однако еще в [1] отмечалось, что при моделировании диэлектрических границ раздела точность расчетов сильно снижается.

Обычно для повышения точности границу раздела размывают, заменяя кусочно-постоянную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(x)$ некоторой гладкой функцией [2, 3]. Однако с помощью такого подхода добиться p_{th} не удается [4], более того, он приводит к искажению электродинамических свойств изучаемой структуры.

Причина снижения точности заключается в том, что решение по схеме Йе вблизи границы раздела начинает осциллировать, то есть становится сильно немонотонным. Пример такого расчета дан на рис. 1, а. На нем показано прохождение нормализованного гауссова импульса через кремниевую пластинку $(\varepsilon = 11.56)$. На концах отрезка ставятся поглощающие граничные условия Мура. Границы раздела «воздух−Si» и «Si−воздух» изображены зелеными штрихами. Представлена зависимость z — компоненты вектора электрического поля E_z от координаты x в два момента времени, когда: 1) импульс еще не достиг границы раздела (синяя пунктирная линия), 2) он уже вышел из пластинки (красная сплошная линия). Видно, что на нескольких первых сетках немонотонность сохраняется, а на достаточно подробных визуально пропадает.

Обозначенная выше проблема изначально заложена в схеме Йе. Согласно теореме Годунова [5], двухслойная линейная монотонная схема для системы уравнений гиперболического типа не может иметь порядок точности $p \geq 2$. Этим объясняется нарушение монотонности и понижение фактического порядка точности вычислений по схеме Йе.

Поэтому в прикладных расчетах целесообразно либо использовать принципиально другие схемы (например, [6]), либо реккурентно повышать порядок точности в процессе расчетов по методу сгущения сеток (метод Ричардсона-Калиткина) [7, 8]. Он позволяет повышать порядок точности вплоть до выхода на фон ошибок округления и не требует модификации исходных уравнений метода FDTD [9, 10].

При применении этого подхода нужно учитывать важный нюанс: для обеспечения аппроксимации точки разрывов $\varepsilon(x)$ необходимо поставить в узлы сетки электрического поля [11]. Тогда с помощью метода сгущения сеток можно построить апостериорную асимптотически точную оценку погрешности, не требующую знания производных исходной функции. Вычитая ее из решения, можно реккурентно повышать порядок точности.

Пример расчета на сгущающихся сетках с рекуррентным уточнением решения показан на рис. 1. Представлены нормы C погрешностей решения для второго момента времени в зависимости от числа шагов N в двойном логарифмическом масштабе (рис. 1, б). Регулярные участки кривых асимптотически выходят на прямые с углом наклона $\tan\alpha = -p$, где p – фактический порядок точности. Он указан около каждой из линий. При отсутствии рекуррентных уточнений (красная кривая) вычисления методом FDTD проводятся с $p = 1$. Метод сгущения сеток обеспечивает $p = 2$, 3, 4 и т.д. (оранжевая, желтая и зеленая кривые).

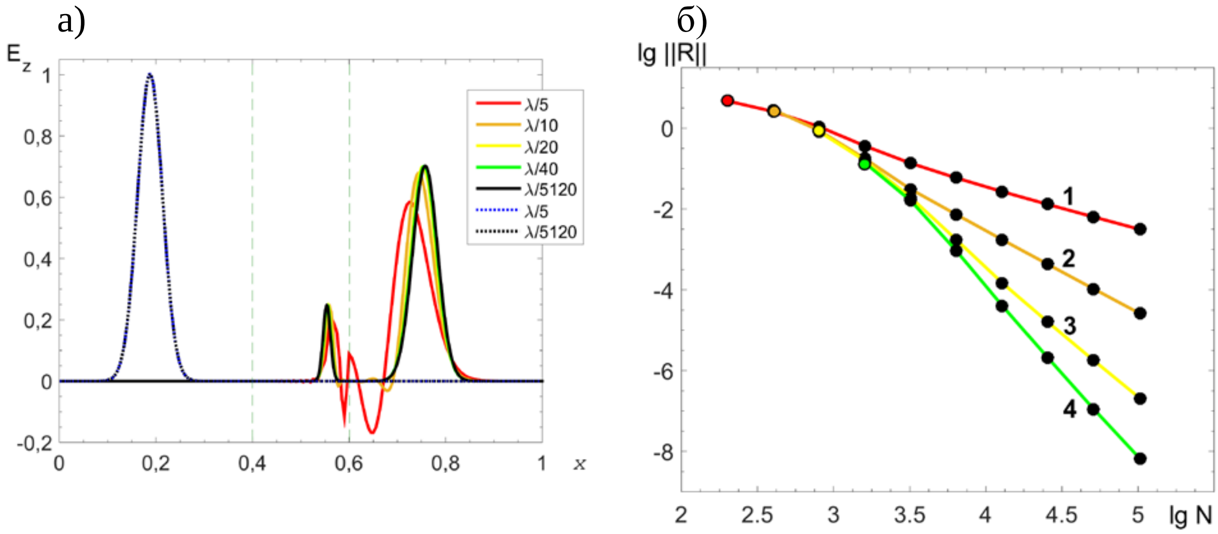


Рис. 1. а) Зависимость электрической напряженности от координаты на сгущающихся сетках с учетом уточнения решения. б) Погрешности при сгущении сеток и рекуррентных уточнениях. Цифры около линий — порядок точности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 15-01-03524, 16-31-00418).

Литература

1. Cangellaris A. C., Wright D. B., IEEE Trans. Antennas Propag. 1991. 39, 1518.
2. Hwang K. P., Cangellaris A. C. IEEE Microw. Wireless Compon. Lett. 2001. 11, 158.
3. Chu Q. X., Ding H. Microwave Opt. Techn. Lett. 2007. 49, 3007.
4. Armenta R. B., Sarris C. D. Proceedings of the IEEE MTT-S International. 2012.
5. Годунов С. К. Матем. сб. 1959. 47(89), 271.
6. [Godunov S. K. Math. Sbornik. 1959. 47, 271. Translated US Joint Publ. Res. Service, JPRS 7226, 1969.]
7. Кудрявцев А. Н., Трашкеев С. И. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. 53, 1823.
8. [Kudryavtsev A. N., Trashkeev S. I. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2013. 53, 1653.]
9. Richardson L. F. Philosophical Transactions of the Royal Society A. 1927. 226, 299.
10. Калиткин Н. Н., Альшин А. Б., Альшина Е. А., Рогов Б. В. Вычисления на квазиравномерных сетках. М., 2005.
11. Домбровская Ж. О., Боголюбов А. Н. Известия Российской академии наук. Серия физическая. 2017. 81, 117.
12. [Dombrovskaya Zh. O., Bogolyubov A. N. Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. 2017. 81, 106.]
13. Домбровская Ж. О., Боголюбов А. Н. Ученые записки физического факультета МГУ. 2016. 3, 163112.
14. Домбровская Ж. О. Моделирование и анализ информационных систем. 2016. 23, 539.

МГД-МОДЕЛЬ ВЫСОКОШИРОТНОГО ТОКОВОГО СЛОЯ В ГЕЛИОСФЕРЕ

Асп. Кислов Р.А., н. с. Хабарова О.В., с. н. с. Малова Х.В.

Работа посвящена моделированию новой крупномасштабной структуры в гелиосфере — конусообразного высокоширотного токового слоя, обнаруженного по данным Ulysses над южным полюсом Солнца.

В модели рассматривается симметричный относительно оси вращения Солнца плазменный конус, границы которого определяются положением альфвеновской поверхности и находятся процессе решения. Граничные условия задаются на Солнце в основании магнитных линий, образующих структуру. Модель является осесимметричной идеальной стационарной МГД:

$$P=nT$$

$$\rho(v,\nabla)v=-\nabla P+1/c[j,B]$$
$$divB=0$$
$$rotB=4\pi j/c$$
$$rotE=0 \to E=-\nabla\varphi$$
$$E+1/c[v,B]=0$$
$$div(\rho v)=0$$
$$P=K\rho^{\gamma}$$

При решении используется стандартный метод потоков, в котором полоидальные составляющие магнитного поля и плотности импульса определяются как

$$B_r=-\partial\Phi/r\partial z$$
$$B_z=\partial\Phi/r\partial r$$
$$\rho v_r=-\partial F/r\partial z$$
$$\rho v_z=\partial F/r\partial r$$

где F,Ф — соответственно массовый и магнитный потоки через поверхность между осью вращения Солнца и заданной магнитной поверхностью. Азимутальные проекции скорости и магнитного являются функциями радиуса и потоков.

Решения, полученные при дополнительных предположениях о том, что течение плазмы является сверхтепловым и сверхальфвеновским, описывают характерные отличия обнаруженной Ulysses структуры от окружающего солнечного ветра: резкий провал в величине скорости плазмы и в плазменном бета, пик плотности, незначительная степень нарушения коротации и нейтральные поверхности токовых слоёв вблизи границ. При пересечении альфвеновской поверхности применяется регуляризация, так что решения остаются непрерывными.

Отдельно исследована возможность задания границы структуры как нейтральной линии магнитного поля Солнца, образованного магнитными диполем и квадруполем. В данном случае токовый структура окажется значительно толще, чем в наблюдениях, для большинства значений квадрупольного момента.

Работа поддержана грантами РФФИ № 14-02-00308 и № 14-02-00769.

Литература

1. Khabarova O.V., Malova H.V., Kislov R.A., Zelenyi L. M., Obridko V.N., Kharshiladze A.F., Tokumaru M., Sokół J.M., Grzedzielski S., and Fujiki K., The Astrophysical Journal. 836. 2. 2017.
2. Вопросы теории плазмы. Сб. статей. Вып. 8. Под ред. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1974, с. 384.
3. Parker E. N. // Astrophys. J. 1958. V. 128. P. 664.

4. Burger R. A., Kruger T. P. J., Hitge M. and Engelbrecht N.E., The Astrophysical Journal. 674: 511–519. 2008.

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

с. н. с. ИПУ РАН *Гафаров Е.Р.*, проф. МГУ *Лазарев А.А.*

Графический метод является модификацией метода динамического программирования, использует тот же декомпозиционный подход к решению задач комбинаторной оптимизации. В [1] показано, что алгоритмы динамического программирования имеют субэкспоненциальную трудоемкость в отличие от экспоненциальной трудоемкости алгоритмов ветвей и границ [2] для некоторых NP трудных задач комбинаторной оптимизации.

Будем обозначать алгоритм динамического программирования через DPA (DynamicProgrammingAlgorithm), а графический алгоритм — GrA (GraphicalAlgorithm). В DPA на каждом шаге (на каждой стадии) j вычисляются значения некоторой функции $F_j(t)$ для каждого возможного значения аргумента t (для каждого состояния) процесса принятия решения, где $t \in [0, C]$ и $t \in Z$. Будем называть функцию $F_j(t)$ функцией Беллмана. Фактически эта функция соответствует значениям целевой функции для подзадачи размерности j, если она решается в условиях (при состоянии системы) t. На практике DPA реализуется в режиме "калькулятора", т.е. перебираются все состояния $t \in [0, C]$ и $t \in Z$, для каждого состояния проводятся несложные вычисления, и полученное значение $F_j(t)$ записывается в ячейку памяти (в таблицу). Эти C числовых значений используются на следующем шаге $j + 1$. Часто нет необходимости в вычислении (и сохранении в памяти) значения $F_j(t)$ для каждой точки t. Может оказаться, что на некотором интервале $[t_l, t_{l+1})$ вычисляемая функция представима аналитически в виде $F_j(t) = \varphi(t)$ (например, $F_j(t) = k \cdot t + b$), т.е. функция $F_j(t)$определена в том числе для нецелых значений аргумента t). Тогда процесс вычисления функции $F_{j+1}(t)$ на шаге $j + 1$ можно организовать таким образом, чтобы учитывать не отдельные значения $F_j(t)$, а преобразовывать функцию $F_j(t)$в$F_{j+1}(t)$ аналитически, согласно заданным рекурсивным уравнениям Беллмана.

Пусть для некоторой проблемы минимизации целевого функционала заданы рекурсивные уравнения Беллмана:

$$F_j(t) = \min \begin{cases} \Phi^1(t) = \alpha_j^1(t) + F_{j-1}(t - a_j^1), & j = 1, 2, \ldots, n, \\ \Phi^2(t) = \alpha_j^2(t) + F_{j-1}(t - a_j^2), & j = 1, 2, \ldots, n, \\ \ldots & \ldots \\ \Phi^{k_j}(t) = \alpha_j^{k_j}(t) + F_{j-1}(t - a_j^{k_j}), & j = 1, 2, \ldots, n, \end{cases} \quad (1.1)$$

с начальными условиями:

$$\begin{array}{ll} F_0(t) = 0, & t \geq 0, \\ F_0(t) = +\infty, & t < 0. \end{array} \quad (1.2)$$

В (1.1) значения $a_j^k,\ k = 1, \ldots, k_j$, будем называть “стратегиями”, определенными для данного элемента системы j. Каждой стратегии $a_j^k,\ k = 1, \ldots, k_j$, соответствует функция $\Phi_j(t)$ и значение переменной $x_j = x_j^k$, участвующей в итоговом решении. Переменная x_j — управляемый параметр на шаге j процесса. Трудоемкость DPA для такой системы уравнений равна $O(\sum_{j=1}^n k_j C)$ операций. На шаге $j,\ j = 1, 2, \ldots, n$, DPA вычисляются и сохраняются в памяти компьютера данные, представленные в табл. 1.

Таблица 1. Вычисления в DPA.

t	0	1	2	$\ldots$	y	$\ldots$	C
$F_j(t)$	$value_0$	$value_1$	$value_2$	$\ldots$	$value_y$	$\ldots$	$value_C$
частичное оптимальное решение $X(t)$	$X(0)$	$X(1)$	$X(2)$	$\ldots$	$X(y)$	$\ldots$	$X(C)$

В табл. 1 $X(y),\ y = 0, 1, \ldots, C$, — вектор, описывающий частичное оптимальное решение, которое состоит из j элементов (значений) $x_1, x_2, \ldots, x_j$. Та же самая информация иногда может быть представлена в виде, приведенном в табл. 2, где $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{m_j} = C$. В этом же виде могут храниться промежуточные функции $\Phi^k(t)$. Точки $t_1, \ldots, t_{m_j}$ будем называть *точками излома*, так как в них изменяется уравнение, задающее функцию $F_j(t)$.

Функция $F_{j+1}(t) = \min\{\Phi^1(t), \ldots, \Phi^{k_{j+1}}(t)\}$ вычисляется следующим образом. Пусть таблица, которой задана функция $\Phi^k(t)$, содержит интервалы (столбцы)

$$[t_0^k, t_1^k), [t_1^k, t_2^k), \ldots, [t^k_{(m_j+\mu_k)-1}, t^k_{(m_j+\mu_k)}], \ k = 1, \ldots, k_j.$$

Для вычисления функции $F_{j+1}(t)$ необходимо сравнить все функции $\Phi^k(t), \ k = 1, \ldots, k_j$, на каждом интервале, сформированном точками

$$\{t_0^k, t_1^k, t_2^1, \ldots, t^k_{(m_j+\mu_k)-1}, t^k_{(m_j+\mu_1)} | k = 1, \ldots, k_j\}.$$

Таблица 2. Вычисления в GrA.

t	$[t_0, t_1)$	$[t_1, t_2)$	$\ldots$	$[t_l, t_{l+1})$	$\ldots$	$[t_{m_j-1}, t_{m_j}]$
$F_j(t)$	$\varphi_1(t)$	$\varphi_2(t)$	$\ldots$	$\varphi_{l+1}(t)$	$\ldots$	$\varphi_{m_j}(t)$
частичное оптимальное решение $X(t)$	$X(t_0)$	$X(t_1)$	$\ldots$	$X(t_l)$	$\ldots$	$X(t_{m_j-1})$

На каждом из этих интервалов уравнение, задающее функцию $\Phi^k(t), \ k = 1, \ldots, k_j$, неизменно, поэтому можно аналитически найти точки их пересечения и построить функцию минимума. Пусть μ' — общее количество точек пересечения. Тогда в таблице, соответствующей функции $F_{j+1}(t)$, может быть $M = k_{j+1}m_j + \sum_{i=1}^{k_{j+1}} \mu_i + \mu'$ интервалов. GrA можно построить таким образом, что все нецелочисленные точки излома будут исключены из таблицы $F_{j+1}(t)$.

Для некоторых задач количество таких точек M небольшое. Графический алгоритм имеет трудоемкость $O(\sum_{j=1}^{n} k_j \min\{C, M\})$ операций вместо $O(\sum_{j=1}^{n} k_j C)$ операций, как в алгоритме динамического программирования.GrA имеет следующие преимущества перед DPA:

- с помощью GrA можно решать примеры с нецелочисленными и отрицательными параметрами;
- время работы GrA в двух примерах с множеством числовых параметров P и множеством параметров $\{b \cdot 10^l \pm 1 | b \in P\}, k > 1,$ совпадает, в то время как время работы DPA будет в 10^l раз больше во втором примере, т.е. с помощью GrA, можно решать примеры “большого масштаба”;
- GrA для некоторых задач имеет полиномиальную трудоемкость, в то время как алгоритм DPA — псевдополиномиальную трудоёмкость.

Но для некоторых примеров рассмотренных задач трудоемкость GrA равна трудоемкости DPA. Можно привести примеры задач с нецелочисленными параметрами, для которых трудоемкость GrA является экспоненциальной.

Литература

1. O'Neil E.T., Kerlin S. A Simple $2^{O(\sqrt{x})}$ Algorithm for PARTITION and SUBSET SUM. 2010. http://www.lidi.info.unlp.edu.ar/WorldComp2011-Mirror/FCS8171.pdf
2. Posypkin M.A., SigalI.Kh. Speedup estimates for some variants of the parallel implementations of the branch-and-bound method // J. Math. Math. Physics. 2006. V. 46. No. 12. P. 2189–2202.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПЛАНИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПОЕЗДОВ НА ОДНОПУТНОМ УЧАСТКЕ ЖЕЛЕЗНОЙ ДОРОГИ

Проф. *Лазарев А.А.*, проф. *Зиндер Я.А.*, с. н. с. *Мусатова Е.Г.*,
студ. *Тарасов И.А.*

Постановка задачи

Имеются два множества поездов: N_1 и N_2. Поезда множества N_1 находятся на станции 1 и должны отправляться на станцию 2, в то время как поезда множества N_2 находятся на станции 2 и должны отправляться на станцию 1. Между станциями находится разъезд для пропуска встречных поездов, вмещающий один поезд. В разъезде есть главный путь для безостановочного движения поездов и один дополнительный путь для пропускающего поезда. Поезд, который идет по основному пути, проходит разъезд без остановки. Скорость движения поездов одинакова и постоянна. Время прохождения поездом участков пути между станцией 1 и разъездом и между станцией 2 и разъездом равно p_1 и p_2 соответственно. Без потери общности будем полагать, что $p_1 \geq p_2$. Количество поездов множества N_1 равно n_1, а множества N_2 — n_2. Поезда могут покидать станции отправления с момента времени $t = 0$. Задано минимальное время между отправлением двух поездов с одной станции, прибытием двух поездов к разъезду, и между прибытием поезда на станцию и отправлением поезда с той же станции. Будем считать, что это время одно и то же и обозначим его через β. Будем полагать, что $\beta < p_2 \leq p_1$. Обзор литературы по исследованию задач подобного типа может быть найден в [1].

Необходимо составить расписание движения поездов σ, удовлетворяющее перечисленным выше условиям, т.е. указать время отправления $S_s^i(\sigma)$ каждого поезда $i \in N_s, s \in \{1,2\}$, и время $\tau_s^i(\sigma)$, которое каждый поезд i проводит в разъезде, $i \in N_s, s \in \{1,2\}$. Таким образом, время прибытия поезда $i \in N_s$ на станцию назначения равно

$$C_s^i(\sigma) = S_s^i(\sigma) + p_1 + p_2 + \tau_s^i(\sigma).$$

Рассматривается задача минимизации целевой функции

$$\gamma(\sigma) = \odot_{i=1}^{n_1} \varphi_1^i\left(C_1^i(\sigma)\right) \odot \odot_{i=1}^{n_2} \varphi_2^i\left(C_2^i(\sigma)\right), \quad (1)$$

где $\varphi_s^i(\cdot)$ — неубывающая функция, а $\odot$ — некоторая ассоциативная и коммутативная операция такая, что для любых величин a_1, a_2, b_1, b_2, удовлетворяющих неравенствам $a_1 \le a_2$ и $b_1 \le b_2$, следует $a_1 \odot b_1 \le a_2 \odot b_2$. В качестве операции $\odot$ могут быть рассмотрены, например, операции сложения или взятия максимума. К функциям данного вида относятся, например, максимальное временное смещение, взвешенная сумма моментов прибытия поездов и количество опоздавших поездов. Будем считать, что на каждой станции задан линейный порядок всех поездов с этой станции и для любых поездов i и j со станции s таких, что i предшествует j в этом порядке, для любых моментов времени $t_1 < t_2$ выполняется $\varphi_s^i(t_1) \odot \varphi_s^j(t_2) \le \varphi_s^i(t_2) \odot \varphi_s^j(t_1)$. Нетрудно видеть, что существует оптимальное расписание, в котором порядок отправления поездов с каждой станции совпадает с соответствующим линейным порядком для этой станции.

Алгоритм решения задачи

Предлагаемый алгоритм строит расписание, принимая решения только в моменты отправления поездов, которые не останавливаются в разъезде. Будем называть такие поезда экспрессами. Все экспрессы можно разделить на шесть типов в зависимости от того, с какой станции отправляется этот экспресс и существует ли поезд, который пропускает этот экспресс, и, если этот поезд существует, остается ли он в разъезде после прохождения разъезда данным экспрессом. Будем называть «пакетом» множество всех экспрессов, которым уступает путь один и тот же неэкспресс. Назовем типом экспресса пару (s, b), где s задает номер станции, с которой идет экспресс, b принимает значение

- 0, если экспресс идет через пустой разъезд;
- 1, если этот экспресс идет в пакете не последним;
- 2, если этот экспресс является последним в пакете.

Процесс построения расписания может рассматриваться как последовательный процесс, на каждом шаге которого определяется тип следующего экспресса. При этом множество рассматриваемых расписаний можно ограничить расписаниями, где каждый экспресс отправляется как можно раньше. В этом случае моменты отправления экспрессов принадлежат множеству

$$T = \{t | t \ge 0, t = m_1 p_1 + m_2 p_2 + m_3 \beta, \text{ где }$$
$$m_1, m_2 \in \{-1, 0, 1, \dots, 2(n_1 + n_2)\}, m_3 \in \{0, 1, \dots, 2(n_1 + n_2)\}\}.$$

Пусть i является экспрессом типа (s,b). Обозначим через k_s число поездов на станции s в момент времени S_s^i, включая i. Что касается противоположной станции $\bar{s}$, рассмотрим множество поездов, состоящее из неэкспресса (если он существует), который должен находиться в разъеде, когда i проходит разъезд, плюс все остальные поезда, которые находятся на станции $\bar{s}$ в момент времени $S_{\bar{s}}^i$. Обозначим число этих поездов через $k_{\bar{s}}$.

Легко видеть, что четверка (k_1,k_2,s,b) удовлетворяет следующим ограничениям: 1) $k_s \geq 1$ и $k_{\bar{s}} \geq 0$; 2) если $b \neq 0$, то $k_{\bar{s}} \geq 1$; 3) если $b = 1$, то $k_s \geq 2$.

Любая четверка, удовлетворяющая перечисленным условиям, будет называться состоянием. Таким образом, моменту отправления каждого экспресса соответствует некоторое состояние. Для любого состояния (k_1,k_2,s,b) обозначим через $\Omega(k_1,k_2,s,b)$ множесто всех состояний (k_1',k_2',s',b') таких, что пара состояний (k_1,k_2,s,b) и (k_1',k_2',s',b') могут соответствовать двух последовательным экспрессам. Состояние (k_1,k_2,s,b) назовем конечным, если $\Omega(k_1,k_2,s,b) = \emptyset$. Пронумеруем поезда на каждой станции в порядке, обратном порядку отправления.

Рассмотрим все расписания, в которых экспресс i со станции s отправляется в момент времени $t \in T$, которому соответствует состояние (k_1,k_2,s,b). Обозначим через $G(t,k_1,k_2,s,b)$ минимальное среди всех таких расписаний σ значение

$$\bigodot_{j\in\{1,2,\dots,k_1\}} \varphi_1^j\left(C_1^j(\sigma)\right) \odot \bigodot_{g\in\{1,2,\dots,k_2\}} \varphi_2^g\left(C_2^g(\sigma)\right).$$

Тогда для конечных состояний получаем:

$$G(t,1,0,1,0) = \varphi_1^1(t+p_1+p_2);\ G(t,0,1,2,0) = \varphi_2^1(t+p_1+p_2);$$

$$G(t,1,1,1,2) = \varphi_1^1(t+p_1+p_2) \odot \varphi_2^1(t+2p_1);$$

$$G(t,1,1,2,2) \ = \varphi_1^1(t+2p_2) \odot \varphi_2^1(t+p_1+p_2).$$

Если (k_1,k_2,s,b) не является конечным состоянием, то

$$G(t,k_1,k_2,s,b) = \Phi(t,k_1,k_2,s,b) \odot \min_{(k_1',k_2',s',b')\in\Omega(k_1,k_2,s,b)} \{G(t+h(s,b,s',b'),k_1',k_2',s',b')\},$$

где $\Phi(t,k_1,k_2,s,b) = \begin{cases} \varphi_s^{k_s}(t+p_1+p_2) \odot \varphi_{\bar{s}}^{k_{\bar{s}}}(t+2p_s), & \text{если } b = 2 \\ \varphi_s^{k_s}(t+p_1+p_2), & \text{иначе,} \end{cases}$

функция $h(s,b,s',b')$ — минимальное время между отправлением двух последовательных экспрессов типов (s,b) и (s',b') соответственно.

Обозначим через $X(n_1,n_2)$ все допустимые пары (s,b), которые соответствуют величинам n_1, n_2. Тогда оптимальное значение целевой функции равно

$$\gamma^* = \min_{(s,b)\in X(n_1,n_2)} G(S_s^{n_s},n_1,n_2,s,b).$$

где $S_s^{n_s} = \begin{cases} 0, & \text{если } b = 0; \\ max\{0, p_s + \beta - p_s\}, & \text{если } b \neq 0. \end{cases}$

Общее число возможных состояний (k_1, k_2, s, b) равно $O(n_1 n_2)$, а мощность множества T равна $O((n_1 + n_2)^3)$, что влечет сложность алгоритма $O(n_1 n_2 (n_1 + n_2)^3)$ операций.

Литература

1. Лазарев А.А., Мусатова Е.Г., Тарасов И.А. Решение задачи планирования двухстороннего движения на однопутном участке железной дороги с разъездом // Автоматика и Телемеханика. 2016. № 11. С. 175–190.

ПОРОГОВЫЕ СТРАТЕГИИ В УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМАХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Проф. *Мандель А.С.*, студ. *Бакулин К.Н.*

Рассматривается функционирование многолинейной управляемой системы массового обслуживания (СМО) с переключаемыми из резервных в рабочие (и обратно) каналами обслуживания и двумя критериями оптимальности: максимум прибыли от работы СМО в периоде планирования и минимум потерь от ожидания требованиями начала обслуживания. Исследуется три случая оптимизации: в стационарном и нестационарном режимах, также для так называемых «близоруких» стратегий.

Все рабочие приборы обслуживания характеризуются экспоненциально распределенными взаимно независимыми случайными временами обслуживания с интенсивностью обслуживания, равной μ. Зададим компоненты затрат. Пусть

c_1 — стоимость эксплуатации одного рабочего устройства обслуживания в ед. времени;

c_2 — стоимость содержания одного резервного устройства обслуживания в ед. времени (естественно, что $c_1 > c_2$; нередко $c_2 = 0$);

A_1 — цена переключения одного устройства из числа резервных в число основных (“включенных”) устройств;

A_2 — цена переключения одного устройства из числа основных в число резервных (“отключенных”) устройств;

h — доход, связанный с окончанием обслуживания одного требования;

m_1 — число рабочих устройств обслуживания до принятия управляющего решения;

m_{1p} — число рабочих устройств обслуживания после принятия управляющего решения.

Требуется максимизировать суммарную среднюю прибыль системы за время ее функционирования в периоде планирования $[0,T]$. Здесь $T = N\tau$, где N — достаточно большое натуральное число, а τ — интервал времени между последовательными моментами принятия решения о подключении новых рабочих устройств либо об отключении части уже работающих.

Исследуется три случая: стационарный, нестационарный и случай замены глобального критерия оптимальности на одношаговый (так называемая «близорукая» оптимизация).

Стационарный случай. Предполагается, что интенсивность входящего потока в фиксированные моменты времени $t_n = n\tau$, $n = \overline{1,N}$ переходит от λ_i к λ_j с вероятностью p_{ij}. Таким образом, в каждом из интервалов длительности τ интенсивность входящего потока постоянна и описывается моделью случайной величины, принимающей значения из конечного множества $\Lambda = \left\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_L\right\}$ (считаем, что $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_L$). Также будем считать, что $M\mu > \lambda_L$, где μ — интенсивность обслуживания одного рабочего устройства, а $M = m_1 + m_2$.

Пусть $\Pi_s^*(\lambda_i, m_1)$ — максимальное значение средней прибыли в интервале, который начинается за s шагов до конца периода планирования $[0,T]$, при значении λ_i интенсивности входящего потока и m_1 включенных (до принятия управляющего решения о включении m_{1p} устройств обслуживания) основных устройств. Выписана система алгебраических уравнений, которым удовлетворяют стационарные вероятности состояний [1]. С использованием этих вероятностей и зависящей от принимаемых решений (управлений) матрицы вероятностей перехода [2] построен алгоритм динамического программирования относительно функции $\Pi_s^*(\lambda_i, m_1)$ для синтеза оптимальных стратегий переключения.

Нестационарный случай. Для упрощения модели предполагается, что изменение величины интенсивности входящего потока детерминированно, заранее известно и может происходить только в моменты контроля состояния СМО и график изменения интенсивности входящего потока по шагам дискретного времени задан в форме:

$$\lambda(t) = \lambda^{(j)}, \quad t \in [t_{N-n+1}, \quad t_{N-n}], \quad n = 1, 2, ..., N.$$

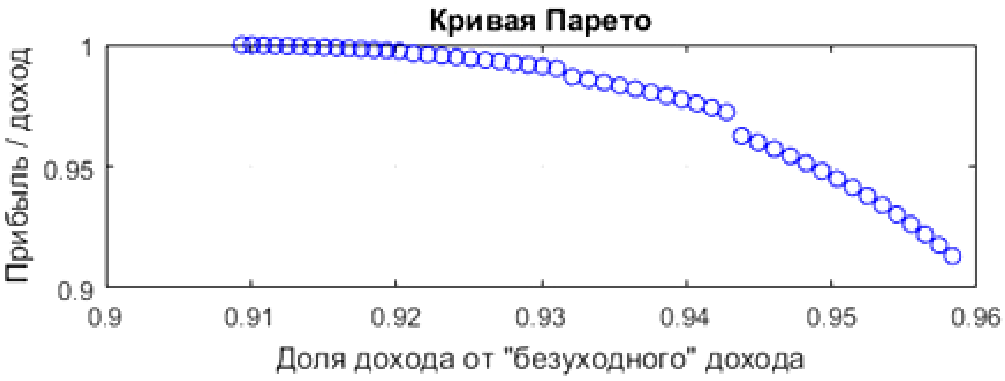
Выписана бесконечномерная система дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют вероятности состояний и построена аппроксимирующая ее конечномерная система [3], на основе которой выполнено моделирование функционирования СМО в нестационарном случае.

Пусть $\Pi_s^*(\lambda_i, i, m_1)$ — максимальное значение средней прибыли на интервале, который начинается за s шагов до конца периода планирования

$[0, T]$, при значении λ_i интенсивности входящего потока, числе требований в системе i и m_1 включенных (до принятия управляющего решения о включении m_{1p} устройств) основных устройств. Построен алгоритм динамического программирования для расчета функционала $\Pi_s^*(\lambda_i, i, m_1)$ и синтеза оптимальных стратегий переключения.

Случай близоруких стратегий. При работе с «близоруким» (одношаговым) критерием оптимальности, на самом деле, используется два критерия: критерий максимума одношаговой прибыли и критерий минимума затрат на пребывание требования в очереди. При этом в качестве модели динамики времени пребывания требования в очереди используется модель так называемого «нетерпеливого» клиента [1].

Машинное моделирование. В процессе численного решения построенных в работе уравнений динамического программирования подтвержден общий вывод о пороговом характере оптимальных стратегий переключения каналов, который в несколько более слабой форме был сформулирован в работе [4]. Приведем только один из построенных при компьютерном моделировании графиков для случая близоруких стратегий:



Литература

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. - М.: Наука, 2012. – 400 с.
2. Мандель А., Барладян. И., Токмакова А. Многолинейная СМО с изменением числа рабочих каналов: стационарный случай в кн.: Восемнадцатая международная научная конференция «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные системы: управление, вычисление, связь (DCCN–2015)», Москва, 22 октября 2015.
3. Мандель А., Махукова В. Многолинейная СМО с изменением числа рабочих каналов: нестационарный случай в кн.: Восемнадцатая международная научная конференция «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные системы: управление, вычисление, связь (DCCN–2015)», Москва, 22 октября 2015.

4. Рыков В.В. Управляемые системы массового обслуживания // Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. Том 12, 1975. - С. 43–153.

О МЕТОДАХ КОРРЕКТИРОВКИ СТРАТЕГИЙ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ ПРИ УЧЕТЕ СЛУЧАЙНОСТИ ВРЕМЕН ЗАПАЗДЫВАНИЯ ПОСТАВОК

Проф. *Мандель А.С.*, студ. *Зюбина А.Л.*

Рассматривается система управления запасами со случайным спросом и случайными временами θ запаздывания поставок на пополнение запасов. При этом весь неудовлетворенный сразу потребительский спрос учитывается. В качестве правила оценки эффективности системы выбран критерий минимума суммарных средних затрат на периоде планирования $T = N\tau$. Здесь τ — период контроля за состоянием запасов. Интервал длительности τ называется шагом процесса управления. В начальный момент каждого такого интервала измеряется значение фиктивного уровня запасов[1] x, и на основании результатов измерения следует принять решение о необходимости подачи (или не подаче) заказа на пополнение запасов (который поступит в систему через случайное время θ) и размере заказа u.

Спрос на k-м шаге (в интервале между (k – 1)-м и k-м моментами контроля описывается случайной величиной z_k. Предполагается, что величины $\{z_k\}_{k=1}^N$ не зависимы в совокупности и имеют одно и то же вероятностное распределение с функцией распределения $F(z)$ с плотностью вероятности $f(z)$. Распределение времени запаздывания поставок θ описывается функцией распределения $G(\theta)$ и плотностью вероятности $g(\theta)$,.

Поставлена задача поиска корректирующих поправок к оптимальным стратегиям управления, которые, как известно [1, 2] принадлежать классу двухуровневых (R, r)-стратегий управления запасами. Фактически, рассматриваемая задача относится к достаточно сложной и популярной в теории вероятностей и математической статистике проблематике о пересечении (или первом достижении) случайным процессом заданного уровня [3, 4]. В данном случае, это достижение наличным запасом нулевого уровня. Решение сводится к выделению таких видов случайных процессов, для которых проблема оценки вероятности достижения становится «пробиваемой» (марковские процессы, мартингалы и т.д.). В прикладных проблемах, а рассматриваемая задача относится именно к этому классу, необходимо попытаться, учитывая специфику проблемы внести в модель те уточнения, благодаря которым удается выписать алгоритм расчета искомых оценок.

---
[1] По определению [1] фиктивный уровень запаса = наличному запасу есть + еще не пришедшие, но уже заказанные поставки – учтенный задолженный спрос.

Случай 1. Именно это и делается в рассматриваемой задаче корректировки стратегий управления запасами посредством введения понятия «локального дефицита». В отличие от классической модели [1, 2], в которой факт дефицита на шаге регистрировался только тогда, когда запас к концу шага в системе оказывался отрицательным, при случайном времени запаздывания поставки будем фиксировать факт возникновения дефицита и в том случае, когда еще до окончания шага наличный запас заканчивается. Назовем такой дефицит «локальным».

Введём дополнительный критерий качества функционирования системы управления запасами. Потребуем, чтобы вероятность локального дефицита на каждом шаге была ограничена величиной β, $0 \le \beta < 1$. Для того, чтобы придать явлению возникновения локального дефицита динамическую (временную) структуру, следует ввести дополнительный предположения о том, как реализуются во времени случайные величины спроса на шаге z_n. Одним из наиболее простых предложений является гипотеза о том, что на протяжении шага случайная величина z_n задает постоянную интенсивность спроса, равную z_n/τ. Это означает, что к моменту прихода поставки (в момент, отстоящий от момента подачи заказа на величину θ) совокупная часть спроса z_n, уже предъявленная в систему управления запасами составит величину $z_n(\theta) = (\theta/\tau) z_n$,Очевидно, $z_n(\theta) \le z_n$.

Пусть $x > 0$ – текущий уровень наличного запаса, с которого начинается очередной шаг. Тогда для того, чтобы локального дефицита на рассматриваемом шаге не возникло необходимо, чтобы $x \ge z(\theta)$. Иначе говоря, нужно, чтобы $z \le x\tau/\theta$. Поскольку случайная величина z описывается плотностью вероятности $f(z)$, то вероятность отсутствия локального дефицита на шаге составит величину $\int_0^{\theta_{max}} \int_0^{\frac{x\tau}{\theta}} f(z) g(\theta)\, dz\, d\theta$. Таким образом, в силу выбранного дополнительного критерия необходимо, чтобы

$$\int_0^{\theta_{max}} \int_0^{\frac{x\tau}{\theta}} f(z) dz\, g(\theta)\, d\theta \le 1 - \beta . \quad (1)$$

Для заданного β решение уравнения (1) определяет «добавок» r^* к нижнему уровню двухуровневой стратегии управления запасами r. Новая точка подачи заказа теперь задается величиной $r' = r + r^*$. При этом, если размер оптимальной точки подачи заказа (классической) может зависеть от номера шага, описываясь величинами r_n , размер «добавки» к r_n один и тот же (от номера шага не зависит) и определяется решением уравнения (6).

Случай 2. Далее рассматривается вариант неслучайного и равному целому числу «шагов» запаздывания поставок θ: $\theta = s\tau$, где s — натуральное число. Как показано в работе [5], в этом случае решение проблемы сводится к замене переменной состояния: вместо фиктивного уровня запасов x теперь нужно использовать также скалярное описание состояния в форме обобщенной переменной $y = x + u_1 + u_2 + \ldots + u_s$, где через u_l обозначен размер заказа, поданного за l шагов до текущего момента времени $l = 1, 2,\dots ,$ s.

После этого доказывается, что можно построить алгоритм динамического программирования, которому удовлетворяет оптимальная стратегия управления запасами. Это уравнение отличается от уравнения для классической модели [1], но функциональные компоненты его описания обладают важным свойством A-выпуклости [2], которые обуславливают факт оптимальности и в этом случае (R, r)-стратегий, однако с уже другими значениями параметров $\tilde{R}_n$ и $\tilde{r}_n$.

Случай 3. Пусть время запаздывания поставки θ случайно и его величина составляет не менее s интервалов длительности τ между моментами контроля за состоянием запасов, но не превышает $s + 1$ интервала длительности τ. Иначе говоря, $s\tau \le \theta < \theta_{max}$, где $\theta_{max} < (s + 1)\tau$. Это означает, что плотность вероятности распределения случайной величины θ равна 0 для $s\tau < 0$ и $\tau > \theta_{max}$.При этом $\int_{s\tau}^{\theta_{max}} g(\theta)\, d\theta = 1$. Такое ограничение на вероятностное распределение времени запаздывания поставок наложено для того, чтобы, как это чаще всего бывает на практике, поставки «не перепутывались» во времени, т.е. приходили на склад в том же порядке, в каком и подавались соответствующие заказы на пополнение запасов.

При этом для расчета поправки к параметрам $\tilde{r}_n$ выводится формула, аналогичная формуле (1). Параметры $\tilde{R}_n$ остаются прежними.

Литература

1. Хедли Дж., Уайтин Т. Анализ систем управления запасами. М.: Наука, 1969.
2. Arrow K.J., Karlin S., Scarf H. Studies in the mathematical theory of inventory and production. – Stanf. Univ. Press, Stanford, California, 1958.
3. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1976. – 696 с.
4. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Теория мартингалов. – М.: Наука, 1986ю – 512 с.
5. Первозванский А.А. Математические модели в управлении производством. М.: Наука, 1975.

ОПТИМИЗАЦИЯ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Проф. *Мандель А.С.*, студ. *Котик К.В.*

Рассматривается двухкритериальная многошаговая (динамическая) однопродуктовая задача управления запасами на фиксированном интервале времени (периоде планирования) при случайном спросе и предлагается два способа её решения с построением близких к оптимальным (субоптимальным) стратегий управления.

На основе исследования особенностей классической (однокритериальной) постановки многошаговой задачи управления запасами [1] и исключительной сложности и многозначности, а, стало быть, недостоверности решения прикладной проблемы оценки эконометрических параметров издержек, порождаемых дефицитом, сделан вывод о том, что альтернативным подходом к выбору стратегии управления может быть рассмотрение альтернативной постановки задачи с двумя критериями оптимальности. В качестве таких критериев выбраны минимум суммарных средних затрат на пополнение запасов и их хранение в течение периода планирования $G_n^*(x)$, где x — уровень начального запаса, и максимум вероятности отсутствия дефицита $P_n(x)$.

Задача ставится так: на n-шаговом периоде планирования необходимо так выбрать все размеры заказов (управления) $u_n^*(x), u_{n-1}^*(x), ..., u_1^*(x)$, чтобы одновременно добиться

$$\min_{u_n, u_{n-1}, ..., u_1} G_n^*(x), \quad (1)$$

$$\max_{u_n} P_n(x) \text{ для всех } n, \quad (2)$$

Очевидно, что критерии (1) и (2) противоречивы. В самом деле, чтобы приблизить вероятность отсутствия дефицита к 1 необходимо увеличивать запасы на складе (в принципе, до бесконечности), а для того, чтобы минимизировать затраты на пополнение запасов и их хранение, необходимо уменьшать запасы (в принципе, до 0). Кроме того, неразумно добиваться одновременной максимизации всех уровней обслуживания Pn(x), Pn−1(x),... , P1(x) одновременно. Поэтому на первом этапе рассматривается другая, по сути, равноценная в прикладном плане задача: найти такие управления $u_n^*(x), u_{n-1}^*(x), ..., u_1^*(x)$, чтобы все вероятности Pk(x), k = 1, 2,.. ,n, были равны заданному, достаточно близкому к 1 уровню обслуживания β, 0 < β < 1, а при этом средние суммарные затраты оказывались минимально возможными.

Показано, что в такой постановке задача (1)–(2) вырождается в достаточно простую, но не вполне корректную процедуру расчета оптимальных управлений. По сути, при этом гарантируется, что Pi(x) ≥ β для всех i, но при этом процедура минимизации средних затрат вырождается в не оптимизационный алгоритм расчета управлений: для шага n выбрать величину $\tilde{x}_n$ так, чтобы

$$P_n(\tilde{x}_n) = \beta, \quad (3)$$

$$u_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{если решение уравнения (3) } \tilde{x}_n > x_n; \\ \tilde{x}_n - x_n, & \text{если } \tilde{x}_n < x_n. \end{cases} \quad (4)$$

По сути, это означает, что двухкритериальная задача (1)–(2) подменена однокритериальной с критерием (2) в форме (3). В результате оказывается не воспроизведенной процедура минимизации критерия (4). Чтобы восстановить такую возможность, следует изменить идеологию постановки задачи, заменив условие (3) требованием выполнения следующего неравенства:

$$P_n(\tilde{x}) = \int_0^{\tilde{x}} f(x)dx \geq \beta \quad \forall n. \quad (5)$$

Известно [1, 2], что (R, r)-стратегия оптимальна при условии, что функция суммарных средних затрат для n-шагового процесса является A-выпуклой [1]. Воспользуемся следующей идеей: оптимальность двухуровневой (R, r)-стратегии при гипотезе об A-выпуклости функции средних затрат заставляет предполагать, что такая стратегия управления может быть принята и в тех случаях, когда нет уверенности в выполнении указанной гипотезы.

В предположении, что уровень запаса xn на n-ом шаге планирования образует марковскую последовательность, в [3] получено, что

$$\lim_{n\to\infty}(R_n - r_n) = \sqrt{2\lambda A/h}, \quad (6)$$

где A — постоянные затраты на заказ, λ — интенсивность спроса, а h — удельные затраты на хранение товара на одном шаге.

Кроме того, если выбрать величину n0 — средней длины цикла между очередными поставками с помощью формулы, которая является аналогом классической формулы Уилсона [1][2]:

$$n_0 = \left[\sqrt{2A/h\bar{z}}\right], \quad (7)$$

где через [x], обозначена целая часть числа x.

Тогда можно показать, что реальное (случайное) число шагов n между соседними поставками удовлетворяет следующему вероятностному неравенству [4]:

$$P\left\{n_0\left(1 - t\sqrt{\frac{D_z}{\bar{z}^2 n_0}}\right)\right\} \leq n \leq P\left\{n_0\left(1 + t\sqrt{\frac{D_z}{\bar{z}^2 n_0}}\right)\right\} = 2\Phi(t), \quad (8)$$

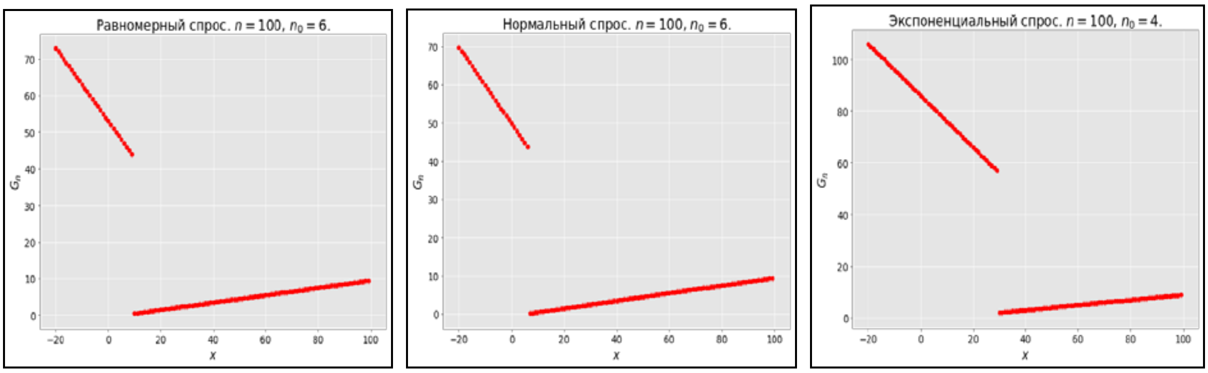
где $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ — интеграл Гаусса.

[2] При этом важно, чтобы $A \gg (c+h)\bar{z}$ или, хотя бы, $A \gg h\bar{z}$, где c — цена единицы приобретаемого складом товара, а $\bar{z}$ — средний спрос на шаге.

Если в качестве примера взять случай, когда $\sqrt{\frac{D_z}{\bar{z}}} = 0{,}1$, а n0 = 10, то вероятность того, что реальная (случайная) длина интервала между поставками с вероятностью 0,97 будет отличаться от n0 не более, чем на 1.

В результате, основную часть управляющего воздействия может сыграть построенная с помощью аналогов формул Уилсона детерминированная компонента спроса (среднее значение спроса за один шаг равно $\bar{z}$), которая в значительной степени и определит верхний уровень R. Вспомогательной частью управляющего воздействия становится точка подачи заказа r, которая играет роль страхового запаса, позволяющего компенсировать случайные возмущения.

Моделирование. Приведем графики зависимости значений функционала $G_n^*(x)$ при выборе управлений по алгоритму (5), (7):



Моделированием подтверждается, что характер закона распределения значений спроса на n-м шаге zn почти не зависит от закона распределения n0.

Литература

1. Хедли Дж., Уайтин Т. Анализ систем управления запасами. М.: Наука, 1969.
2. Arrow K.J., Karlin S., Scarf H. Studies in the mathematical theory of inventory and production. – Stanf. Univ. Press, Stanford, California, 1958.
3. Первозванский А.А. Математические модели в управлении производством. М.: Наука, 1975.
4. Кокс Д., Смит В. Теория восстановления. М.: Сов. Радио, 1968.

ГИБРИДНЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ДИФРАКЦИОННЫХ СТРУКТУР

Вед. программ. *Петухов А.А.*

В современной лазерной технике, системах коммуникации, космических исследованиях и многих других областях науки и техники широко применяются дифракционные структуры. Под дифракционной структурой будем понимать любую периодическую или непериодическую структуру с характерными размерами порядка длины волны падающего на нее излучения, при дифракции этого излучения на которой осуществляется перераспределение волновой энергии в пространстве и/или изменение направления ее распространения. К дифракционным структурам относятся, в частности, дифракционные решетки, различного рода вставки, помещенные в волновод, а также другие структуры подобного типа.

Из всех классов дифракционных структур следует особо выделить широкий класс многослойных дифракционных структур. Многослойной будем называть такую дифракционную структуру, которая в точности или приближенно представляет собой совокупность однородных или неоднородных слоев, имеющих различные свойства. Многослойными дифракционными структурами являются, например, гибридные структуры, представляющие собой комбинацию одной или нескольких дифракционных решеток с различным типом профиля и многослойного покрытия. К примерам многослойных дифракционных структур относятся ячейка солнечной батареи, многослойная неоднородная вставка, помещенная в оптический или радиоволновод и другие подобные структуры.

При моделировании многослойных дифракционных структур традиционно рассматривается два типа задач — прямые задачи анализа дифракционных структур и обратные задачи синтеза дифракционных структур с заданными характеристиками. Наибольший практический интерес представляет решение задач синтеза, однако и для их эффективного решения, в первую очередь, требуется наличие эффективного и надежного метода решения соответствующей прямой задачи.

В данной работе рассматривается два основных типа многослойных дифракционных структур — многослойные неоднородные вставки, или нерегулярные элементы, помещенные в регулярный волновод, и многослойные дифракционные решетки. Известные методы моделирования многослойных дифракционных структур (такие как метод конечных разностей, метод конечных элементов, строгий метод связанных волн и другие) либо являются достаточно общими и не учитывают возможных особенностей задачи, либо специализированы под очень узкий класс дифракционных структур. Для класса многослойных дифракционных структур требуется разработка и реализация новых методов математического моделирования, применение которых позволит эффективно решать как прямые, так и обратные задачи моделирования таких структур.

Известные методы моделирования многослойных дифракционных структур либо являются достаточно общими и не учитывают возможных особенностей задачи, либо специализированы под очень узкий класс дифракционных структур. Для класса многослойных дифракционных структур требуется разработка и реализация новых методов математического моделирования, применение которых позволит эффективно решать как прямые, так и обратные задачи моделирования таких структур.

Данная работа посвящена разработке, программной реализации и применению новых гибридных методов для математического моделирования широкого класса многослойных дифракционных структур. Объектом исследования в работе являются двумерные и трехмерные векторные и скалярные задачи дифракции плоской волны на многослойных дифракционных структурах. Предметом исследования является разработка и программная реализация гибридных методов решения таких задач дифракции с применением неполного метода Галеркина и обобщенных матричных методов (метода матриц переноса, метода матриц рассеяния).

Разработаны гибридные методы для математического моделирования широкого класса многослойных дифракционных структур, основанные на комбинации неполного метода Галеркина и обобщенных матричных методов (метода матриц переноса, метода матриц рассеяния). Создан комплекс программ для моделирования многослойных дифракционных структур, в частности, волноводов с многослойными неоднородными вставками и многослойных дифракционных решеток, реализующих разработанные гибридные методы. С помощью разработанных гибридных методов и комплекса программ решен ряд задач анализа и синтеза многослойных дифракционных структур различных типов.

Разработанные гибридные методы и реализующий их комплекс программ могут быть применены при моделировании многослойных дифракционных структур различных типов, используемых в различных областях науки и техники. Так, разработанные методы и комплекс программ могут быть применены в радиофизике и оптике для расчета параметров волноводов, содержащих многослойные неоднородные вставки, в том числе фрактального строения, для расчета спектральных характеристик и решения обратных задач синтеза многослойных дифракционных структур, предназначенных для применения в лазерной технике, системах телекоммуникаций, ячейках солнечных батарей и других областях техники.

Литература

1. Боголюбов А.Н., Петухов А.А., Шапкина Н.Е. *Математическое моделирование волноводов, содержащих локальные вставки с фрактальной структурой.* // Вестник Московского Университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 2011. № 2. С. 20–23.
2. Петухов А.А. Совместное применение неполного метода Галеркина и метода матриц рассеяния для моделирования многослойных дифракци-

онных решеток. // Математическое моделирование. 2013. Т. 25. № 6. С. 41–53.

3. Боголюбов А.Н., Петухов А.А., Трубецков М.К. *Математическое моделирование многослойных дифракционных решеток*. // Физические основы приборостроения. 2014. Т. 3. № 4. С. 20–27.
4. Петухов А.А., Боголюбов А.Н., Трубецков М.К. *Гибридные методы моделирования волноводов, содержащих локальные неоднородные вставки с многослойным строением*. // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2016. Т. 17. № 3. С. 268–279.
5. Petukhov A., Trubetskov M., Bogolyubov A. *Avoiding diffraction order singularity in scattering matrix approach used for grating modeling.* // Progress In Electromagnetic Research Symposium. August 19–23, 2012. Moscow, Russia. PIERS Proceedings. P. 1220–1224.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛНОВЕДУЩИХ СИСТЕМ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Проф. *Боголюбов А.Н.*, доц. *Пикунов В.М.*, н. с. *Ерохин А.И.*, асп. *Светкин М.И.*

Предложена математическая модель трехмерной периодической волноведущей системы без потерь, период d которой состоит из объединения нескольких регулярных участков различных прямоугольных сечений (рис. 1). Структуры с подобной геометрией представляют, как теоретический [1, 2], так и практический интерес, например, при создании устройств СВЧ диапазона [3]. При численном моделировании таких систем возникают плохо обусловленные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

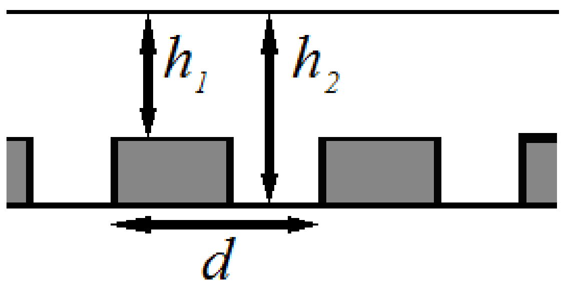


Рис. 1. Продольное сечение периодической волноведущей системы.

Рассматриваемая модель основана на неполном методе Галеркина и методе проекционного сшивания полей, обеспечивающим непрерывность потока вектора Умова–Пойнтинга, и учитывает бесконечные переотражения от скачкообразных стыков участков волновода с разными сечениями.

Предложенный численный алгоритм расчета собственных мод периодической волноведущей системы приводит к задачам с хорошо обусловленными матрицами.

Корректность модели исследовалась с помощью предельного перехода к регулярному прямоугольному волноводу, дисперсионные характеристики которого могут быть получены аналитически [4]. В случае $h_1 / h_2 = 0,99$ (рис. 2) рассчитанные дисперсионные характеристики практически совпадают с дисперсионными характеристиками регулярного волновода ($h_1 / h_2 = 1$).

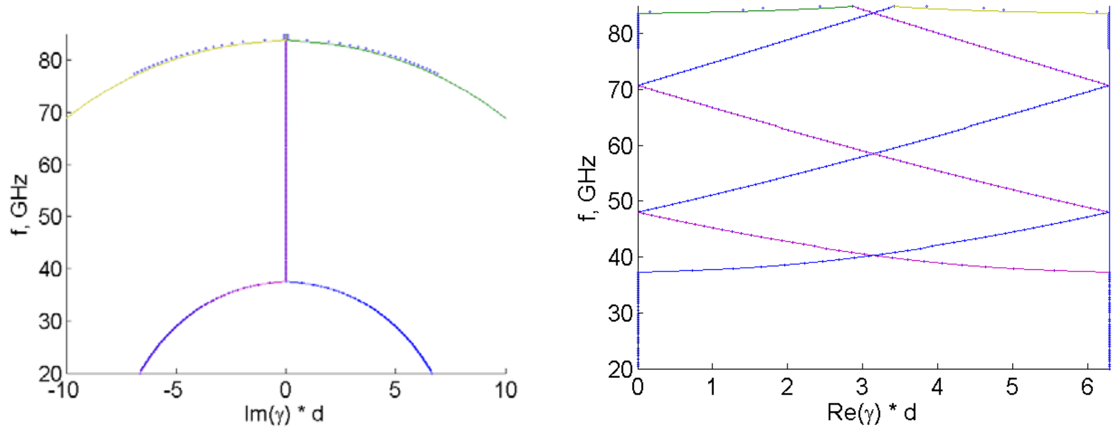


Рис. 2. Зависимость мнимой и действительной части γ от частоты для волновода с $h_1 / h_2 = 0,99$.

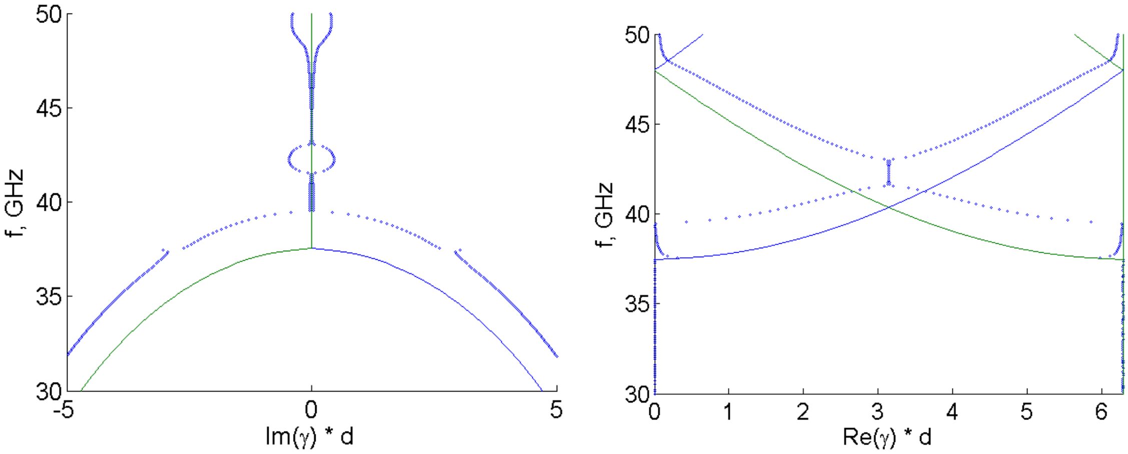


Рис. 3. Зависимость мнимой и действительной части γ от частоты для волновода с $h_1 / h_2 = 0,85$.

На рис. 3 представлены дисперсионные характеристики волновода с более сильной нерегулярностью ($h_1 / h_2 = 0,85$), что приводит к появлению зон непрозрачности в определенных диапазонах частот. Наличие таких зон было получено асимптотическими методами в работе [5].

Предложенный метод является быстрым и эффективным. Построены дисперсионные характеристики для конкретных систем, работающих в терагерцовом диапазоне. Данная модель может быть применена к более сложным многозазорным структурам, возникающим при расчете систем с распределенным взаимодействием.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 16-31-60084 мол_а_дк, № мол_а_дк, № 15-01-03524 и № 16-01-00690.

Литература

1. А.С. Ильинский, Н.Б. Косич. Дифракция плоской волны на двумерной периодической структуре // Радиотехника и электроника, 1974, т. 19, № 6, с. 1171–1182.
2. А.С. Ильинский, С.В. Трубников, Н.А. Федосеева. Исследование резонансных явлений в фазированной антенной решетке из прямоугольных волноводов. Стр. 131–143. В кн. Математические модели и оптимизация вычислительных алгоритмов. Изд. Моск. университета, 1993.
3. Григорьев А. Д. Электродинамика и техника СВЧ. – 1990.
4. Свешников А. Г., Могилевский И. Е. Математические задачи теории дифракции //М.: Физический факультет МГУ. – 2010.
5. Назаров С. А. Асимптотика спектральных лакун в регулярно возмущенном периодическом волноводе //Вестник С.-Пб. университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. – 2013. – №. 2.

МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ МАГНИТНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПЛАЗМОЙ В ТОКАМАКЕ С КОДОМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ В ОБРАТНОЙ СВЯЗИ НА ОСНОВЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Проф. *Митришкин Ю.В.*, асп. *Прохоров А.А.*, асп. *Коренев П.С.*, н. с. *Патров М.И.*

Современные токамаки (тороидальные камеры с магнитными катушками) с вытянутым по вертикали поперечным сечением для повышения давления плазмы являются лидерами в решении проблемы управляемого термоядерного синтеза (http://www.tokamak.info/). Изучение плазмы в токамаках как объекта управления сложной физической природы, построение ее моделей по экспериментальным данным и с использованием законов физики плазмы, разработка методов достоверной диагностики плазмы по магнитным измерениям вне плазмы, разработка, исследование и применение в физическом эксперименте эффективных систем автоматического управления плазмой в условиях наличия неконтролируемых внешних воздействий, наличия неполной возможной информации, ограниченности ресурсов управления и множественности критериев оценки управления, развитие методики изучения плазмы, методики построения и моделирования систем диагностики и управления плазмой представляет собой актуальную задачу. В этой связи развитие методов моделирования систем магнитного управления плазмой с диагностическими кодами в обратной связи для надежного удержания высокотемпературной плазмы вблизи первой стенки токамаков приобретает особо важное значение.

В данной работе рассматривается новый метод моделирования систем магнитного управления формой и током плазмы с кодом восстановления равновесия плазмы в обратной связи токамака [1]–[3]. При моделировании процессов магнитного управления плазмой в токамаках на плазмофизических кодах типа TSC, CORSICA (США), TOSCA (Япония), PET, DINA (Россия) коды восстановления не применяются в обратной связи, т.к. граница плазмы (сепаратриса) находится непосредственно из решения уравнения Града-Шафранова в коде моделирования эволюции плазмы [4] и для целей выяснения показателей качества систем магнитного управления плазмой восстановление равновесия не требуется. Такой подход использовался, в частности, для ITER [5]. В экспериментах на токамаках [6] для получения границы плазмы на диверторной фазе разряда применяются специальные коды восстановления равновесия плазмы [7], в которых по магнитным измерениям вне плазмы восстанавливается распределение плотности тока плазмы, полоидального магнитного потока и определяется сепаратриса. При этом решается обратная краевая задача, плохо обусловленная по Адамару, что требует регуляризации (в частности, по Тихонову) и применения специальных подходов для повышения точности оценки положения сепаратрисы плазмы. Поскольку код восстановления необходимо применять в экспериментах по управлению формой плазмы, то целесообразно провести детальное исследование систем управления плазмой и настройку кодов восстановления на стадии моделирования систем магнитного управления плазмой, сократить дорогостоящее время эксперимента при внедрении в него системы управления плазмой и уменьшить риск возникновения нештатных ситуаций при работе будущих термоядерных реакторов типа ITER (Франция) и термоядерных электростанция типа DEMO (Япония).

Основная идея рассматриваемого метода состоит в следующем. По экспериментальным данным сигналов с магнитных петель и зондов, а также поясов Роговского, измеряющих токи в обмотках полоидального поля и ток плазмы, восстанавливается равновесие плазмы. Относительно восстановленного равновесия плазмы строятся линейные модели плазмы с переменными параметрами с применением закона Кирхгофа для полоидальной системы токамака с учетом подвижного плазменного витка с током [1]–[3], [8]. При моделировании системы управления плазмой линейная модель плазмы включается в обратную связь, и к сценарным сигналам токов управления, тока плазмы, сигналов с магнитных петель и зондов добавляются соответствующие выходные сигналы линейной модели. Суммарные сигналы поступают на вход кода восстановления, выходом которого являются сигналы смещения сепаратрисы плазмы относительно ее сценарного расположения. Выходные сигналы кода восстановления подаются на вход многомерного регулятора обратной связи для управления формой и током плазмы.

Предложенный подход был проверен компьютерным моделированием систем управления током и формой плазмы в среде MATLAB/Simulink по экспериментальным данным сферического токамака Глобус-М (ФТИ им. А.Ф. Иоффе, г. С-Петербург) с применением двух разработанных кодов восстановления: итерациями Пикара и подвижными бесконечно тонкими кольцами с током (филаментами). При этом применялся для управления положением сепаратрисы метод выравнивания магнитного потока на сепаратрисе (isoflux control) [1], [3], а также метод непосредственного воздействия на смещение сепаратрисы [2].

Восстановление равновесия плазмы и построение линейных моделей относительно восстановленного равновесия было проверено также численным моделированием на плазмо-физическом коде DINA (разработка ГНЦ РФ ТРИНИТИ) [9] при управлении вертикальным и горизонтальным положением плазмы в токамаке Глобус-М.

Литература

1. Ю.В. Митришкин, А.А. Прохоров, П.С. Коренев, М.И. Патров. Способ моделирования систем магнитного управления формой и током плазмы с кодом восстановления равновесия плазмы в обратной связи токамака. Заявка на патент от МГУ им. М.В. Ломоносова (в стадии оформления: проведен патентный поиск).
2. Y.V. Mitrishkin, P.S. Korenev, A.A. Prohorov, M.I. Patrov. Tokamak Plasma Magnetic Control System Simulation with Reconstruction Code in Feedback Based on Experimental Data. Submitted to Conference on Decision and Control, Melbourne, Australia, December 12–15, 2017.
3. Y.V. Mitrishkin, P.S. Korenev, A.A. Prohorov, M.I. Patrov. Robust $H\infty$ switching MIMO control for a plasma time-varying parameter model with a variable structure in a tokamak. Submitted to IFAC 2017 World Congress, 9–14 July 2017, Toulouse, France. Accepted.
4. В.Д. Шафранов Равновесие плазмы в магнитном поле // Вопросы теории плазмы. 1963. Вып. 2. С. 92–131.
5. Ю.В. Митришкин, А.Я. Коростелев, В.Н. Докука, Р.Р. Хайрутдинов. Синтез и моделирование двухуровневой системы магнитного управления плазмой токамака-реактора. Физика плазмы. 2011. Том 37. № 4. С. 307–349.
6. Q.P. Yuan et al., “Plasma current, position and shape feedback control on EAST,” Nucl. Fusion, vol. 53, 043009 (10pp), 2013. doi:10.1088/0029-5515/53/4/043009.

7. A. Beghi and A. Cenedese, “Advances in real-time boundary reconstruction,” IEEE Cont. Syst. Mag., pp. 44–64, October 2005.
8. П.С. Коренев, Ю.В. Митришкин, М.И. Патров. Реконструкция равновесного распределения параметров плазмы токамака по внешним магнитным измерениям и построение линейных плазменных моделей. Мехатроника, автоматизация и управление. Том 17, № 4, 2016, с. 254–265. DOI: 10.17587/mau.17.254–266.
9. В.Н. Докука, П.С. Коренев, Ю.В. Митришкин, Е.А. Павлова, М.И. Патров, Р.Р. Хайрутдинов. Исследование полоидальной системы токамака Глобус-М и управление положением плазмы. Вопросы атомной науки и техники, Серия: Термоядерный синтез, 2016, том 39, вып. 3, с. 80–90.

ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ УПРАВЛЕНИЯ АППАРАТНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ПРИБОРОВ

Ст. преп. *Терентьев Е.Н., Терентьев Н.Е., Фаршакова И.И.*

Аннотация

В комплексах Новый Прибор = ”Прибор + Компьютер” предлагаем использовать управляемую дискретную АФ О Измерительного Прибора так, чтобы путем подбора длины области определения дискретной АФ О и уменьшения шага оцифровки получить разрешающую АФ $R=O^{-1}$ с минимальной нормой — min Nor(R) для реализации предельного сверх разрешения в Компьютере Нового Прибора.

Введение

Будем говорить, что в Новом Приборе (НП) реализуются Физические Принципы Управления (ФПУ) АФ О с оптимальными $pR = pO^{-1}$. Без ФПУ комплексы НП, как правило, не являются работоспособными. Методы регуляризации (в таких неработоспособных НП) дают результаты с большой остаточной ошибкой [1] из-за априорной информации о гладкости решений.

ФПУ АФ приборов позволяют реализовать сверх разрешения в заданной оптимальной оцифровке АФ О и экспериментальных данных без остаточной ошибки. Если окажется, что шаг оптимальной оцифровки АФ О не удается физически уменьшить, то в компьютере реализуем соответствующий пересчет измеренных данных (интерполяцию) под меньший — оптимальный шаг оцифровки. НП в таких ситуациях реализуют предельное сверх разрешения объектов меньше размера пиксела исходного изображения.

Под Характеристиками Адекватности Модели (ХАМ) Дискретных Новых Приборов понимается, взаимная зависимость трех основных числовых характеристик НП: реакции на шум — Nor(zR), Nor(pR), ошибки в задании АФ — Err(pO) и значения индикатора обратимости АФ — II(pR*O) [2–7].

Если Модуляционная Передаточная Функция (МПФ) $diap \le |M(O)| \le 1$, то $1 \le |M(R)| = 1/|M(O)| \le DIAP$. Ограничение в частотной области DIAP=1/diap является параметром обусловленности АФ O [2–7].

В работах [2–7] можно посмотреть подробное объяснение обозначений и смысла новых математических конструкций типа индикатор обратимости II(pR*O).

Физические Принципы Управления АФ в Новом Приборе

Основная задача по выбору оптимальной АФ $pO=pR^{-1}$ ставится как задача на минимум:

$$\min_{LO}\{\|pR\| \mid \|pO-O\| \le err\},\ \ LO=\{N, dx, DIAP\} \qquad \ldots(1)$$

В постановке задачи (1) множество LO — Ложа АФ O содержит: N — множество длин областей определений, dx — множество шагов оцифровки АФ O и исходных данных Измерительного Прибора и множество настроек обусловленности DIAP для АФ pO.

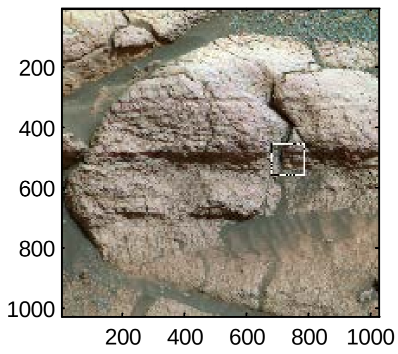
Параметром DIAP задаем обусловленность АФ $pR=pO^{-1}$. С решением задачи (1) связываем ХАМ ДНП:

$$\{x - Nor(pR),\ \ y = Err(pO),\ \ z = II(pR*O)\} \qquad (2)$$

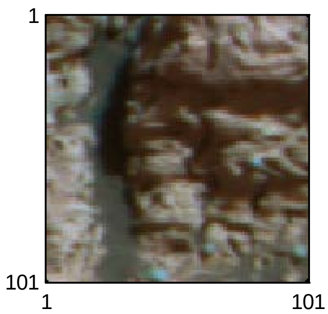
ФПУ АФ O с ХАМ ДНП (2) позволяют управлять работой ДНП.

Золотым ключиком $ выделяем уникальную ситуацию в частной LO — обычное обращение с максимальной точностью: II(pR*O)==1, Err(pO)=0, min Nor(pR) [2–7].

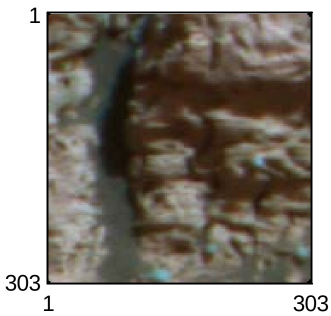
Пример реализации НП с ФПУ АФ



Поверхность Марса, фрагмент



Исходная сетка, dx=1



Интерполяция, dx=1/3

Рис. 1. Фрагмент изображения поверхности Марса в исходной сетке dx = 1 и пересчитанный на сетку с шагом dx = 1/3 или с интерполированием.

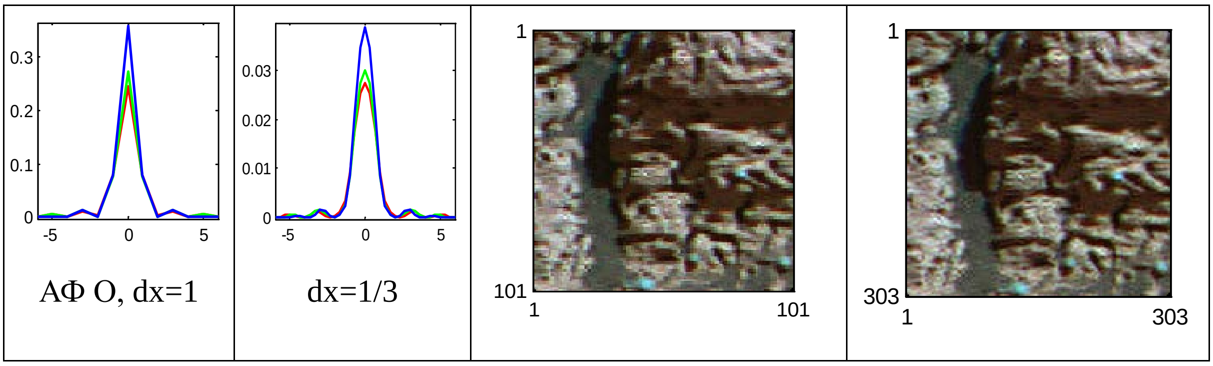


Рис. 2. Изображение поверхности Марса с предельным сверхразрешением.

Ниже приводится зависимости реакций на шум картинка ХАМ НП пока только на исходной сетке dx = 1.

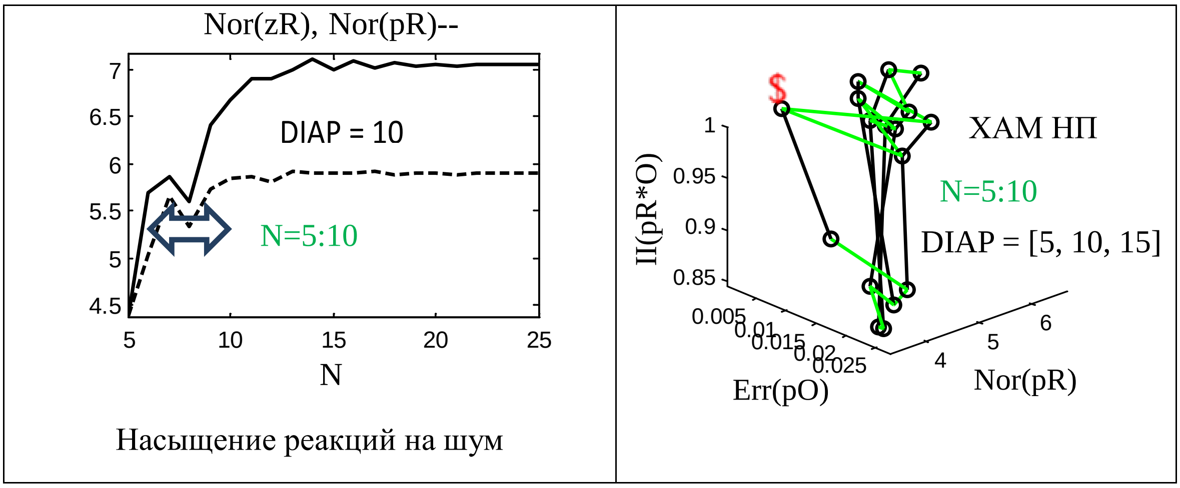


Рис. 3. Реакции на шум и с ХАМ ДНП в исходной сетке dx = 1, выделен ЗК.

Обсуждение

В мало контрастном фрагменте выделенного изображения с байтовыми яркостями ошибки в яркостях порядка 3–5%. НП работоспособен потому, что реакции на шум (рис. 3) небольшие — порядка 6. В интерполированном изображении реализуется предельное сверхразрешение объектов меньше пиксела.

Ожидаются интересные результаты (типа существуют ЗК — обычные обращения с максимальной точностью в частных LO) при исследовании реакций на шум ХАМ ДНП с dx = 1/3, те на дробных сетках.

Литература

1. А.Н. Тихонов, М.В. Уфимцев “Статистическая обработка результатов эксперимента” изд. Московского университета, 1988.
2. Терентьев Е.Н., Терентьев Н.Е., ХАРАКТЕРИСТИКИ АДЕКВАТНОСТИ НАСТРОЙКИ ГРЕБЕНОК ЛУЧЕЙ, ISBN 978-5-93411-057-5, Труды XX Международного Форума по проблемам науки, техники и образования, с. 13–14, Москва, 2016.

3. Е.Н. Терентьев, Н.Е. Терентьев, МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ НАСТРОЙКИ ИЗМЕРИТЕЛЬНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ, ИЗВЕСТИЯ РАН, СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2015, том 79, № 12, с. 1633–1637.
4. Terentiev, E.N. and Terentiev, N. E., Mathematical Principles for Setting Signal Processing Systems and Regularization, ISSN 1062-8738, Bulletin of the Russian Academy of Science. Physics, 2015, Vol. 79, No 12, pp. 1427–1431, DOI 10.3103/S1062873815120229/
5. Терентьев Е.Н., Терентьев Н.Е., Математические Принципы Настройки Измерительных Систем вместо метода регуляризации, ПРОЦЕССЫ В ГЕОСРЕДАХ, стр. 92–98, № 4 (4), 2015.

ТЕОРЕМЫ ОТСЧЕТОВ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

Ст. преп. *Терентьев Е.Н., Терентьев Н.Е., Фаршакова И.И.*

Аннотация

Вместо теоремы Винера-Котельникова [1] и методов, основанных на разностных схемах, в моделировании физических процессов, явлений предлагаем использовать Конечномерные Теоремы Отсчетов (КМТО). КМТО являются основой методов высокоточного математического моделирования.

Введение

Если Обратное Дискретное Преобразование Фурье (ОДПФ) реализовывать через сумму ряда Фурье, а не обращением (симметрией) унитарной матрицы, состоящей из базисных Фурье гармоник, то дискретные операции реализуются с помощью Прямого ДПФ и ОДПФ. При ПДПФ вычисляем Фурье коэффициенты. При ОДПФ в сумме ряда Фурье берем базисные гармоники, которые могут быть заранее продифференцированы, проинтегрированы и оцифрованы с интерполяцией — на более плотном множестве точек. То есть ОДПФ дает результат математической операции [2–4].

Основной результат КМТО в операциях теории поля: Дан 3-х мерный массив отсчетов $D = f(x0, y0, z0)$ в кубе, матрицы $H^{(0)}(x0)$, $x0 = 0 : N-1$ и $H^{(n)}(x)$, $x = 0 : dx : N - dx$, тогда непрерывная функция [2–4]

$$f^{(nx,ny,nz)}(x,y,z) = \sum_{k_x k_y k_z = 1}^{N} c_{k_x k_y k_z} * H^{(nx)}(k_x, x) * H^{(ny)}(k_y, y) * H^{(nz)}(k_z, z) \quad (5)$$

$$c_{k_x k_y k_z} = (f(x0,y0,z0), H^{(0)}(k_x,x0) * H^{(0)}(k_y,y0) * H^{(0)}(k_z,z0)) =$$
$$= \sum_{x0,y0,z0=1}^{N} f(x0,y0,z0) * H^{(0)}(k_x,x0) * H^{(0)}(k_y,y0) * H^{(0)}(k_z,z0),\ \ k_x,k_y,k_z = 1:N \quad (6)$$

проходит через точки отсчетов $f^{(nx,ny,nz)}(x0,y0,z0)$. Скалярные произведения (6) реализует ПДПФ, а Фурье ряд (5) — ОДПФ с интерполяцией, если $dx < 1$.

Приведем пример записи интерполированного градиента от трехмерного числового массива чисел $D = f(x0,y0,z0)$:

$$grad\ D(x,y,z) = \{\frac{\partial}{\partial x}D, \frac{\partial}{\partial y}D, \frac{\partial}{\partial z}D,\} = \{f^{(1,0,0)}(x,y,z),\ f^{(0,1,0)}(x,y,z),\ f^{(0,0,1)}(x,y,z)\}.$$

Примеры операций теории поля

В качестве примера рассматриваем кольцевой вихрь A (заданный тремя трехмерными массивами чисел), с помощью КМТО вычисляем B=rot(A). Получается тороидальный вихрь B. Вычисляем C=rot(B)=rot(rot(A)) — кольцевой вихрь. Вычисляем Дискретное Прямое Векторное ПФ – ДПВПФ D=VFT(C). Визуально убеждаемся, что имеем вихри в частотной области. Окончательно убедимся в этом, если вычислим ротор от векторного ПФ — rot(VFT(rot(rot(A)))).

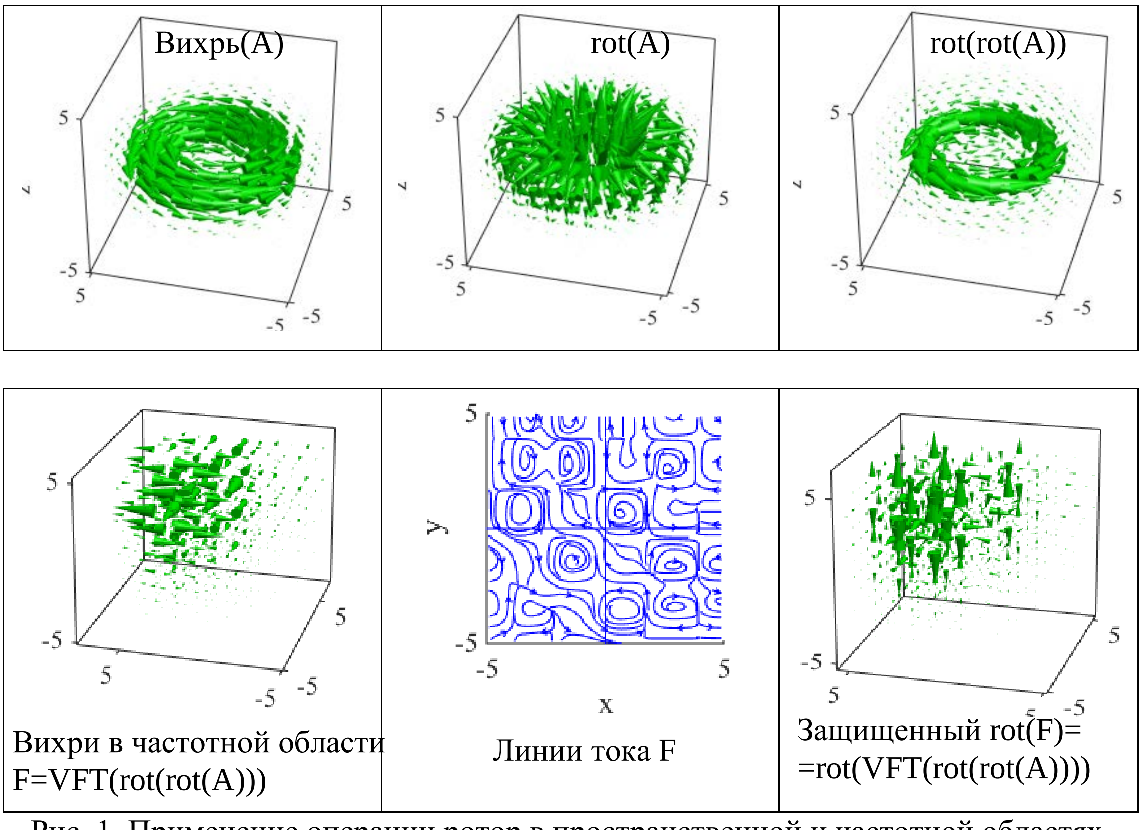
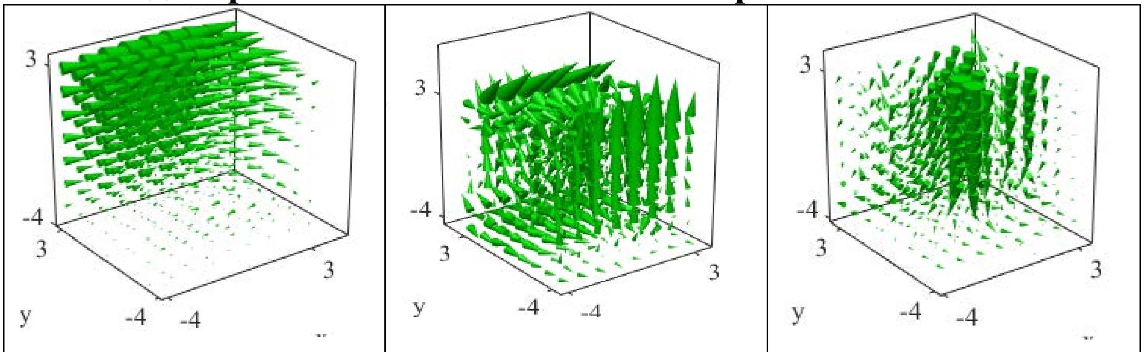


Рис. 1. Применение операции ротор в пространственной и частотной областях.

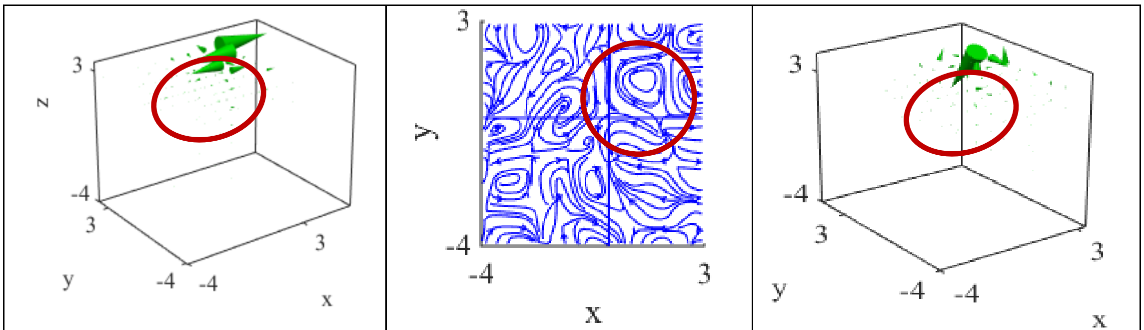
Моделирование слабого бокового вихря



Слабый боковой вихрь A | Незащищенный rot(A) | Защищенный rot(A)

Рис. 2. Пример незащищенной и защищенной операции ротор.

У кольцевого и тороидального на рис. 1 нет граничных эффектов, а у слабого бокового вихря есть. Поэтому требуется применение ротора в защищенном варианте [2–4].



Вихрь F=VFT(A) | Линии тока вихря F | Защищенный rot(F)

Рис. 3. Применение ротора к слабому боковому вихрю.

Большая величина защищенного rot(F) (большой конус на рис. 3) слабого бокового вихря в данном примере определяется размером вихря.

Обсуждение

Все операции выполняются с точностью порядка 10^{-14}, конечноразностные схемы вычисления частных производных при этом не используются. Известную теорему отсчетов Котельникова невозможно связать с операциями анализа.

Литература

1. Кузнецов Н.А., Синицын И.Н. "Развитие теоремы отсчётов Котельникова" УФН179 216–218 (2009).
2. Терентьев Е.Н., Терентьев Н.Е., ТЕОРЕМЫ ОТСЧЕТОВ В ОПЕРАЦИЯХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ТЕОРИИ ПОЛЯ, НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ЛОМОНОСОВСКИЕ ЧТЕНИЯ, Секция физики,

СБОРНИК ТЕЗИСОВ ДОКЛАДА, 18–27 апреля 2016 года, с. 124–127, Москва, Физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, 2016.
3. Терентьев Е.Н., Терентьев Н.Е., МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И ЯВЛЕНИЙ НА ОСНОВЕ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ТЕОРЕМ ОТСЧЕТОВ, ПРОЦЕССЫ В ГЕОСРЕДАХ, стр. 355–362, № 4(9), 2016.
4. Терентьев Е.Н., Терентьев Н.Е., НОВЫЕ ПУТИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ, ПРИБОРОВ СО ВСТРОЕННЫМИ ВЫЧИСЛИТЕЛЯМИ НА ОСНОВЕ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ТЕОРЕМ ОТСЧЕТОВ, ISBN 978-5-93411-057-5, Труды XX Международного Форума по проблемам науки, техники и образования, с. 11–13, Москва, 2016.

ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМЫ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ЗЕРКАЛЬНОГО КОЛЛИМАТОРА

Вед. программ. *Хлебников Ф. Б.,* доц. *Шапкина Н. Е.,* н. с. *Коняев Д. А.*

Для целого ряда практически важных экспериментов, относящихся к прикладной электродинамике, в частности измерения ЭПР исследуемого объекта, необходимо решить задачу получения плоской электромагнитной волны в заданном объеме пространства. Использование открытых полигонов для получения плоской волны осложняется наличием большого количества помех и влиянием погодных условий. Этих недостатков лишен компактный полигон, представляющий собой измерительный стенд, состоящий из безэховой камеры, излучателя, измерительной аппаратуры и коллиматора, как правило, представляющий собой несимметричный вырез металлического зеркала параболической формы, который преобразует волну от 0 излучателя, расположенного в фокусе, в плоскую волну. При этом необходимо учитывать влияние границ зеркала коллиматора на неравномерность распределения отраженного поля [1].

Существует несколько способов снижения влияния краевых эффектов. Обычно кромку рефлектора коллиматоров делают звездообразной или отгибают, чтобы уменьшить интенсивность дифрагированных лучей, приходящих в рабочую зону коллиматора, и перенаправить их мимо рабочей зоны [2].

Существенным побочным эффектом использования коллиматоров со скругленными краями является появление интенсивных боковых лучей, распространя-ющихся в направлении, отличном от оси параболоида. [3] Для решения этой проблемы может быть использовано дополнительное покрытие кромки диэлектриком.

Рассмотрим двумерную задачу дифракции электромагнитной волны на цилиндрическом теле, импеданс которого равен $W(M)$. Пусть S — поверхность цилиндрического, в общем случае импедансного тела заданного сечения Γ, направляющие которого параллельны оси z, а $\vec{E},\vec{H}$ — компоненты цилиндрической волны, распространяющиеся от источника, ось которого также параллельна оси z. Тогда $\vec{E}$ и $\vec{H}$ удовлетворяют системе уравнений Максвелла, которою можно свести к системе уравнений Гельмгольца,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}+\left(k^2-\gamma^2\right)E_z=0, \\ \dfrac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 H_z}{\partial y^2}+\left(k^2-\gamma^2\right)H_z=0, \end{cases} \tag{0.4}$$

с граничными условиями Щукина-Леонтовича[4]:

$$\left[\vec{n}\times\vec{E}\right]=-W\left[\vec{n}\times\left[\vec{n}\times\vec{H}\right]\right]. \tag{0.5}$$

Используя свойства потенциалов простого и двойного слоя, можем свести исходную задачу определения E_z и H_z к интегральному уравнению вида

$$\frac{1}{2}u(M)+\frac{1}{2\pi}\int_S\left[\frac{\partial g(M,P)}{\partial n}-ibg(M,P)\right]u(P)ds=u_0(M), \tag{0.6}$$

где u равно E_z или H_z.

Интегральное уравнение сводится к системе линейных алгебраических уравнений с помощью метода Крылова-Боголюбова. Решение системы позволит получить распределение токов на коллиматоре. Поле точечного источника, расположенного в фокусе зеркала, после отражения от зеркала имеет структуру, близкую по структуре к плоской волне. [5]

Отдельный интерес представляет задача выбора оптимальных параметров скругления, имеющего в своей основе дугу эллипса с полуосями a и b. Чтобы оценить неравномерность полученного поля, построим функционал, представляющий собой среднее квадратичное отклонение значений отраженного поля на сетке в рабочей зоне:

$$F(a,b)=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_n\left(\left|u_n(a,b)\right|-\left|u_0\right|\right)},\quad \text{где}\quad u_0=\frac{1}{N}\sum_n\left|u_n(a,b)\right|. \tag{7}$$

В такой формулировке проблема синтеза скруглений сводится к задаче поиска минимума функционала $F(a,b)$, которая решается методом Нелдера-Мида. При удачном выборе начальных приближений алгоритм позволяет снизить среднее квадратичное отклонение до значения в 5% от амплитуды падающего поля или даже меньше (рис 1).

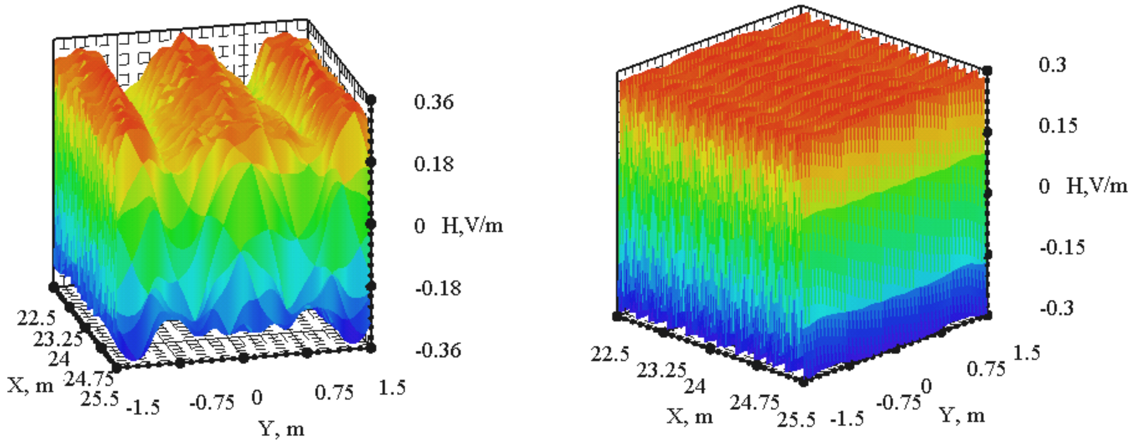


Рис. 1. Отраженное поле в центре рабочей зоны для одного из начальных приближений и оптимального зеркала, полученного в результате минимизации.

Литература

1. Балабуха Н.П., Зубов А.С., Солосин В.С. Компактные полигоны для измерения характеристик рассеяния объектов. М.: Наука, 2007.
2. Gupta I., Ericsen K., Burnside W. A method to design blended rolled edges for compact range reflectors IEEE Transactions on antennas and propagation, vol. 38, no. 6. June 1990.
3. Никитенко А.В, Зубов А.С., Шапкина Н.Е. Моделирование электромагнитного рассеяния на радиопоглощающем материале методом связанных волн. //Математическое моделирование // Математическое моделирование. Т. 26, № 9, 2014, С. 18–32.
4. А.Г.Свешников, И.Е.Могилевский. Математические задачи теории дифракции. – М.: Физический факультет МГУ, 2010.
5. Хлебников Ф.Б., Шапкина Н.Е., Солосин В.С. Математическое моделирование поля в ближней зоне зеркального коллиматора, Двенадцатая ежегодная научная конференция ИТПЭ РАН, Москва 4–7 апреля 2011.

МЕТОДЫ МОРФОЛОГИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДАННЫХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Проф. *Чуличков А.И.*, м.н.с. *Зубюк А.В.*, н.с. *Фаломкина О.В.*,
зав. каф. *Пытьев Ю.П.*

Морфологические методы успешно применяются для анализа и содержательной интерпретации изображений реальных сцен, полученных при неконтролируемых условиях регистрации, таких как условия освещения, его спектральный состав, характеристики аппаратуры, регистрирующей изображения, оптические свойства сцены и др. Эта проблема возникла при разработках систем машинного зрения, систем космического землеобзора, видеоконтрольных устройств, в связи с необходимостью выделения и распознавания объектов на изображениях, полученных при неопределенных условиях освещения, при решении задач ориентации и привязки к местности летательных аппаратов при различных погодных условиях и т.д. Методами морфологического анализа решаются задачи узнавания, классификации идентификации объектов по их изображениям, выделения отличий в сценах по их изображениям и др.

Для решения этих задач разрабатывались и другие, в том числе морфологические, эффективные методы, см., например, [1–8]. Основное отличие методов, развиваемых в настоящей работе, состоит в том, что они основаны на достаточно простой и в то же время реалистичной модели формирования изображений сцены, достаточной для решения широкого круга практических задач. Считается, что условия регистрации изображений могут меняться в широких пределах, тем самым каждая сцена порождает набор своих изображений, который и называется «формой изображения сцены». Если форма рассматривается как выпуклое замкнутое подмножество евклидова пространства изображений, то с ней можно взаимно однозначно связать проектор на это множество. Во многих практически важных случаях этот проектор легко вычисляется, что делает такой подход весьма привлекательным.

В настоящее время морфологические методы анализа сигналов получили дальнейшие развитие, связанное с решением задач сравнительного анализа нескольких форм (классов) изображений на предмет их морфологической зависимости, морфологической связности и т. п. [9]. Идея использования косого проецирования в морфологическом анализе заключена в возможности сравнения двух форм по степени их близости. Одним из распространенных способов моделирования формы сигналов является задание линейного подпространства как множества изображений заданной сцены (сигналов заданного источника). Это линейное подпространство, например, может быть получено как множество изображений, полученных при всевозможных условиях регистрации. В простейшей ситуации, когда изображение сцены задается набором областей поля зрения, определяемых геометрией сцены, а яркости этих областей изменяются в широких пределах при изменении освещения, это линейное подпространство есть линейная оболочка индикаторных функций областей, яркости каждой из которых являются константой [10]. Линейное подпространство V задается оператором ортогонального проецирования P на V. Сходство двух форм как двух линейных подпространств V_1 и V_2 евклидова пространства предлагается характеризовать размерностью подпространства L_0, полученного их пересечением (индекс морфологической связности) и объемом параллелепипеда, ребрами которого являются ортонормированные базисные векторы ортогональных к L_0 дополнений V_1 и V_2 (индекс морфологической независимости). Эти характеристики формально можно построить, используя косые операторы проецирования на V_1 вдоль V_2 и на и V_2 вдоль и V_1.

Привлекательность косого проецирования можно продемонстрировать на решении задачи фильтрации: если, например, известно, что анализируемый сигнал f есть сумма «полезного» сигнала g формы V_1 и помехи h формы V_2, то косые проецирование позволяет безошибочно выделить «уникальные части» помехи и сигнала, в отличие от ортогонального, которое дает лишь наилучшие аппроксимации сигнала f сигналами заданной формы. Т.о., наличие информации о форме слагаемых смеси позволяет улучшить результаты решения задач морфологического анализа.

В последнее время интерес представляет развитие морфологических методов анализа данных, учитывающих субъективные представления исследователя об изображаемой сцене (для анализа изображений) или об источнике сигнала (для анализа сигналов).

В докладе формулируются математические модели форм сигналов (изображений), в том числе и учитывающие субъективные представления исследователя о сигналах, математические методы и численные алгоритмы вычисления характеристики близости (связности и зависимости) двух форм сигналов (изображений), использующие косые проекторы. Демонстрируется работа методов и алгоритмы решения задач морфологического анализа: поиска фрагментов сигнала заданной формы при известной форме помехи, фильтрации сигналов, оценки параметров формы и др. для решения задач геофизики, дистанционного зондирования системы Земля-атмосфера, ядерной физики, спектроскопии, медицины.

Работа поддержана грантом РФФИ № 17-07-00832.

Литература

1. Yakimovsky A.Y. Boundary and object detection in real world images // Journal of the Association of Computing Machinery. 1976. № 23. P. 599–618.
2. Serra J. Image analysis and Mathematical Morphology. Academic Press. London 1982. [C11] Ayache N. and Faugeas O.D. Hyper. A new approach for the recognition and positioning of two-dimensional objects // IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 1986 № 8 (1). P. 44–54.
3. Davies E.R. Locating objects from their point features using an optimized Hough-like accumulation technique // Pattern recognition, 1992 № 13(2). P. 113–121.
4. Виттих В.А., Сергеев В.В., Сойфер В.А. Обработка изображений в автоматизированных системах научных исследований. М.: Наука, 1982.
5. Visilter Yu., Zheltov S., Stepanov A. Object Detection and Recognition using Events-based Image Analysis // SPIE Processings. 1996. V. 2823. P. 184–195.

6. Форсайт А., Понс Дж. Компьютерное зрение. Современный подход. Вильямс 2004. [C16] Dougherty E.R. The dual representation of gray-scale morphological filters. IEEE Trans. PA MI, 1989.
7. Визильтер В.Ю., Сидякин С.В. Построение спектров морфологической сложности для двумерных фигур и изображений // Вестник компьютерных и информационных технологий, № 11, 2012, с. 3–8.
8. Местецкий Л.М. Непрерывная морфология бинарных изображений: фигуры, скелеты, циркуляры. – ФИЗМАТЛИТ, 2009, 228 с.
9. Пытьев Ю.П. Косые проекторы и относительные формы в морфологии изображений. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. № 12. С. 154–176.
10. Пытьев Ю.П., Чуличков А.И. Методы морфологического анализа изображений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 336 с.

Подсекция:

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ

Сопредседатели
профессор А. М. Салецкий, профессор Б. С. Ишханов,
доцент П. А. Форш

СОВРЕМЕННАЯ ФИЗИКА В КУРСЕ «ИСТОРИЯ И МЕТОДОЛОГИЯ ФИЗИКИ»

Проф. *Николаев П.Н.*

В последней четверти XX века в физике, да и в науке в целом, произошли радикальные изменения [1, 2]. Это связано с целым рядом факторов, главным из которых стало превращение науки в такую область деятельности человека, которая непосредственно влияет на производство. В результате появились новые науки и новые технологии, которые в принципе изменили классическое представление о науке.

Нельзя сказать, что это стало неожиданностью. Уже в середине XX века наблюдался бум в развитии науки [3–6]. Это было характерно и для физики. В развитие научных исследований вкладывались огромные средства, величина которых постоянно возрастала. Росло и число людей, занимавшихся научными исследованиями.

Возникшее примерно в это время науковедение предсказывало к концу XX века коллапс в развитии науки, связанный с тем, что у общества просто не хватит средств для поддержания таких темпов развития науки. Государства не стали ждать коллапса, а стали постепенно сокращать финансирование науки.

Но ресурсы для поддержания высоких темпов научных исследований возникли внутри самой науки. Это связано, во-первых, с радикальным увеличением скорости вычислений, и, во-вторых, с принципиально новыми возможностями и объемами хранения информации.

Появившиеся возможности привели в свою очередь к коренным преобразованиям в организации самой науки, включая физику. Если во второй половине XVII века появляются первые научные журналы, число которых возрастало исключительно медленно, то во второй половине XX века появляются первые электронные журналы, число которых стремительно возрастает.

Возникла проблема оценки качества поступающей информации и представления ее в виде, который ученые способны освоить [7]. Если с начала второй половины XX века никто из физиков уже не рисковал утверждать, что он является специалистом во всех ее областях, то к концу XX века, а особенно в начале XXI, стремительно возрастает число узко специальных направлений.

Возникла нетривиальная задача как перед физикой в целом, так и перед историей физики: что в данной области остается общим, несмотря на все многообразие исследуемых явлений, используемого математического аппарата и организационного оформления? Сами группы исследователей стали варьироваться от нескольких человек до нескольких тысяч. При этом финансирование изменяется от весьма скромного до огромных размеров, которые зачастую не по силам отдельным государствам [1, 2].

При всем многообразии современной физики в ней остаются те проблемы, которые принято называть "вечными": пространства, времени, движения, представление о жизни с точки зрения физики [1]. Эти общие проблемы объединяют физиков вне зависимости от тех узких специальных областей, где они работают. Наличие "вечных" проблем говорит о том, что современная физика, строго говоря, не ограничена временными рамками. В зависимости от ситуации проблемы, известные очень давно, становятся современными и актуальными.

При этом история науки знает множество примеров, когда проблема была решена, но актуальной она становится лишь через несколько веков, а иногда и тысячелетий. Достаточно вспомнить эолопил Герона, созданный в первом веке до нашей эры, который по существу явился прототипом паровой турбины, изобретенной во второй половине XX века [2].

С "вечными" проблемами связаны фундаментальные исследования. Представление о них берет свое начало со времен Аристотеля, который писал, что "все люди от природы стремятся к знаниям" [8]. Но строгое определение им дать сложно. Обычно к определению таких исследований относятся как к некоторому первичному понятию, которое уже не определяется. Есть достаточно грубое определение фундаментальных исследований как тех, практическая польза которых изначально не очевидна. При этом утверждается, что в дальнейшем полезность фундаментальных знаний обязательно проявится.

В результате фундаментальных исследований создана фундаментальная наука, которая во многом определяет наше представление об окружающем мире. Считается, что прикладные исследования проводятся с использованием фундаментальных знаний, хотя это, увы, не всегда так. Логика прикладных исследований во многом, если не во всем, определяется текущей конъюнктурой.

Начиная со второй половины XX века в физике начинают использоваться новые методы исследования — метод молекулярной динамики (ММД) и метод Монте-Карло (ММК), которые позволили исследовать системы большого числа частиц и процессы, происходящие в них, без больших материальных затрат. Возможности исследований в области физики значительно расширились, особенно после появления мощных суперкомпьютеров.

Вместе с тем осталось актуальным утверждение, что физика — наука экспериментальная. В последние десятилетия планируются и проводятся эксперименты, которые требуют огромных капитальных вложений, а сроки работ растягиваются на годы и десятилетия (например, поиски кварков, бозона Хиггса, гравитационных волн и т.д.). В ряде случаев эти поиски не увенчиваются успехом.

В силу длительности подготовки и проведения некоторых экспериментов сам их процесс становится предметом исторического исследования. Все это приводит к тому, что процесс изложения современной физики в рамках курса "История и методология физики" должен осуществляться с максимально возможным учетом постоянно изменяющегося содержания физики как науки [2, 9].

Литература

1. Гинзбург В.Л. // Успехи физических наук. 2004. Т. 174. № 11. С. 1240.
2. Николаев П.Н., Николаева О.П. История и методология физики. Том 4. История современной физики. М., 2016.
3. Кун Т.С. Структура научных революций. М., 1975.
4. Спасский Б.И. История физики. Части 1 и 2.. М.: Высшая школа, 1977.
5. Кудрявцев П.С. Курс истории физики. М.: Просвещение, 1982.
6. Селье Г. От мечты к открытию. М., 1987.
7. Nature. 2017. Vol. 541. P. 14.
8. Аристотель. Сочинения. В 4-х томах. М.: Мысль, 1975–1983.
9. Stanley M. // Physics Today 2016. Vol. 69. N 7. P. 38.

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ РАБОТЫ ШКОЛЬНИКОВ В УНИВЕРСИТЕТСКОЙ ГИМНАЗИИ — ПЕРВЫЕ ШАГИ

Доц. *Рыжиков С.Б.*, с. н. с. *Рыжикова Ю.В.*

В этом году произошло знаменательное событие — открылась новая Университетская гимназия. В основу её концепции положено развитие творческих, исследовательских способностей школьников 10–11 классов.

При проведении исследовательских работ со школьниками следует иметь в виду, что существенным фактором, ограничивающим выбор тем, является слабость математического аппарата учеников и отсутствие опыта работы на современных физических приборах.

Авторы имеют большой опыт проведения исследовательских работ со школьниками, начиная с 7-го класса. Методика вовлечения одаренных школьников в исследовательскую деятельность изложена в [1]. Следуя указанной методике, в гимназии был организован элективный курс по решению задач повышенной сложности с применением компьютерного моделирования. Беседы с учениками показали, что интерес, по крайней мере, некоторых из них лежит в области нанотехнологий. Поэтому им было предложено более детально ознакомиться с явлением дифракции, чтобы лучше понимать проблемы, стоящие перед производителями современных микросхем и др. отраслей нанотехнологий.

За месяц школьники познакомились с принципом Гюйгенса-Френеля, освоили расчёты дифракционных картин методом векторных диаграмм на компьютере по методике, изложенной в [1–4]. Дифракционные объекты было предложено создать школьникам самостоятельно, используя прозрачные плёнки и лазерный принтер с разрешением печати 600 dpi (линий на дюйм). Чтобы файл не искажался, использовали самый простой формат — бинарный (двухцветный) файл *bmp* без сжатия и без палитры.

В результате печати файла на пленке получили двухмерную структуру, которая похожа просто на черный квадрат. При освещении лазерной указкой на удаленном экране можно было наблюдать картину дифракции от напечатанного объекта.

Этапы проведения исследовательской работы

Вначале была проведена проверка правильности работы написанной школьниками программы и качество создаваемых на лазерной плёнке объектов. Первыми объектами стали периодические дифракционные решетки, поскольку их дифракционные свойства хорошо известны.

Параметры решеток были выбраны так, чтобы результаты расчетов можно было проверить экспериментально с помощью принтера с разрешением 600 *dpi*. Поэтому размер щели был задан $b = d/2 = 0{,}042$ мм (1/600 дюйма). Было выбрано: число блоков $N = 50$, расстояние до экрана $L = 5$ м, длина волны — 650 нм (красная лазерная указка).

Результаты расчета картин дифракции для одиночной щели и периодической структуры из 50 блоков и экспериментально полученные картины полностью соответствует теории.

На следующем этапе школьникам было предложено исследовать дифракционные свойства непериодических решеток, сформированных на основе последовательностей Фибоначчи, Кантора, Морса-Туэ и др., которые сегодня широко используются в различных областях нанотехнологий [5, 6].

В работе исследовалось:

- различие дифракционных картин для указанных структур;
- зависимость дифракционной картины от числа блоков;
- устойчивость дифракционных картин, т.е. зависимость от того, какая часть решетки освещается лазером.

Результаты расчетов представлены на рис. 1. Из него видно, что в картине дифракции структуры Фибоначчи боковые пики располагаются ближе к нулевому максимуму, чем у периодической структуры, а у структуры Кантора — еще ближе. В картине дифракции структуры двойного периода боковые пики расположены практически там же, где у периодической решетки, но у нее имеются еще менее интенсивные пики, расположенные ближе к центральному максимуму. В картине дифракции структуры Морса-Туэ отчетливо виден только центральный максимум, а остальная картина представляет собой шум.

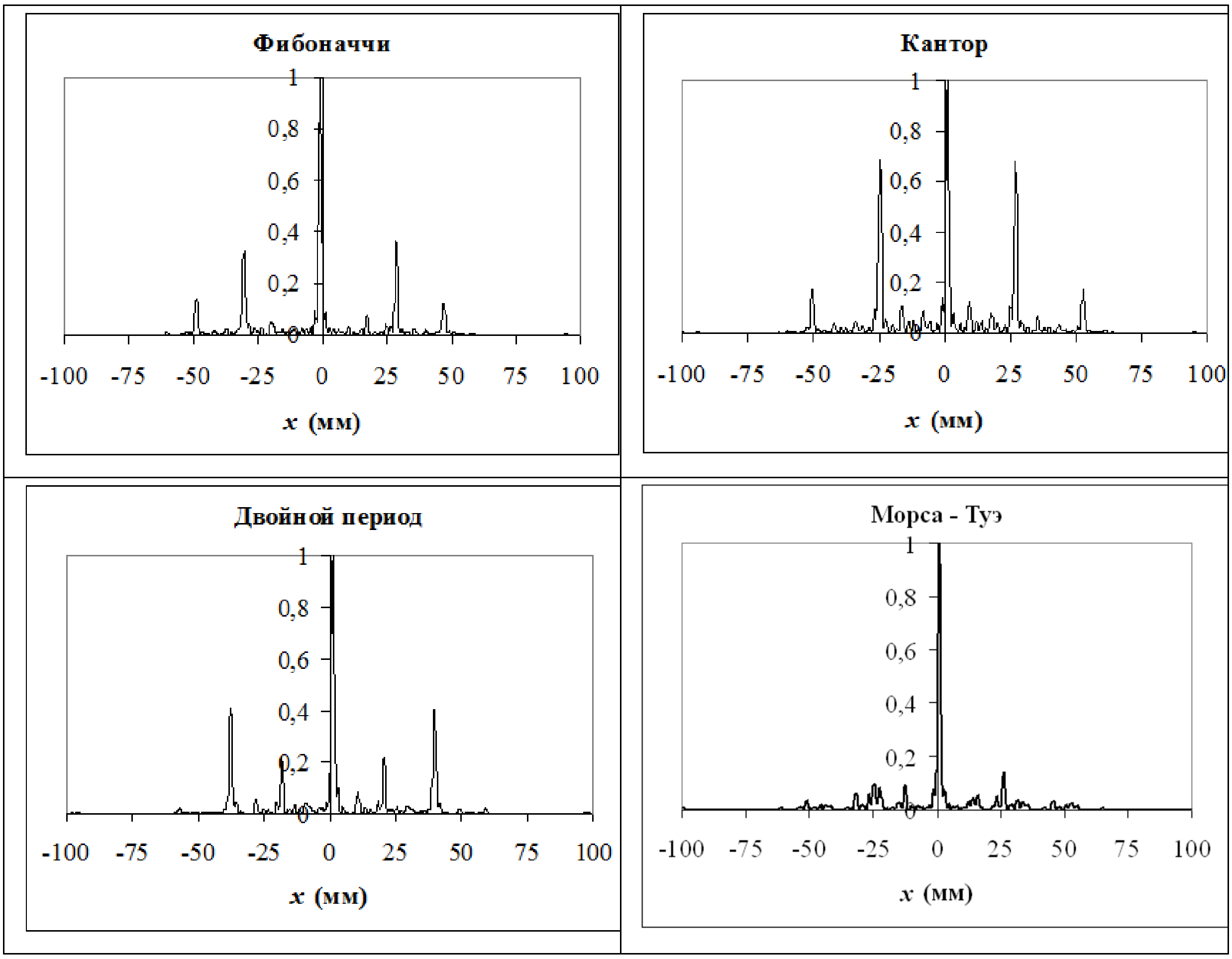


Рис. 1. Зависимость интенсивности дифракционной картины от координаты экрана для структур Фибоначчи, Кантора, двойного периода, Морса-Туэ, $b = d/2 = 0{,}042$ мм.

Решетки с указанными структурами были напечатаны на принтере на прозрачной пленке. В полученных дифракционных картинах были измерены положение боковых максимумов. Экспериментально измеренные положения боковых максимумов совпали с численными расчетами.

Кроме указанных результатов в исследовательской работе было получено, что:

- узкие боковые пики хорошо наблюдаются при числе блоков от 50 до 100, при меньшем числе блоков у них больше ширина, при большем числе блоков — появляются шумы,
- у указанных структур наблюдаемая дифракционная картина практически не зависит от того, с какого элемента начинается ее освещение, с первого или с середины.

Выполненная школьниками исследовательская работа получила диплом II степени на Всероссийском конкурсе научных работ школьников «Юниор-2017» (*http://junior-fair.org*).

Литература

1. Рыжиков С.Б. Диссертация. доктора педагогических наук. М. 2014.
2. Рыжиков С.Б., Рыжикова Ю.В. Загадки оптики. – М.: ОЛМА Медиа Групп. – 2015.
3. Рыжиков С.Б. // Вестник Московского университета. Серия 20: педагогическое образование. 2011. № 3. С. 20–23.
4. Рыжиков С.Б. // Наука и школа. 2013. № 2. С. 104–108.
5. Korolenko P.V., Ryzhikov S.B., Ryzhikova Yu.V. // Physics of Wave Phenomena. 2013. Vol. 21. No. 4. P. 256–260.
6. Barriuso A., Monzon J., Yonte T. et al. // Optics Express. 2013. Vol. 21. No. 24. P. 1-15.

УЧЕБНАЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЗАДАЧА «ИЗМЕРЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ СИЛЬНОРАССЕИВАЮЩИХ ИЛИ НЕПРОЗРАЧНЫХ ЖИДКОСТЕЙ»

Доц. *Якута А.А.*, студ. *Паринов Д.А.*, студ. *Трушников Н.Д.*,
пед. доп. обр. *Черников Ю.А.*,
E-mail: dan.parinov@gmail.com, nd.trushnikov@yandex.ru,
chernikov@sch1329.ru, yakuta.a.a@gmail.com

В рассматриваемой задаче обучающимся предлагается измерить значения показателей преломления различных непрозрачных или малопрозрачных жидкостей с помощью метода, основанного на явлении полного внутреннего отражения. Экспериментальная установка состоит из стеклянного параллелепипеда, монеты, измерительной ленты, линейки длиной 40 см, электронных весов, воды и набора жидкостей с неизвестными показателями преломления. Показатель преломления стеклянного параллелепипеда таков, что любой луч, преломляющийся на его грани, испытывает полное внутреннее отражение на любой смежной (перпендикулярной) грани. Но если на лежащую на столе монету налить несколько капель исследуемой жидкости, а сверху на жидкость поставить параллелепипед, то окажется, что при углах наблюдения больших, чем определенный угол φ (см. рис. 1), изображение монеты видно сквозь вертикальную грань. На рисунке 1 луч, рассеянный жидкостью, падает на вертикальную грань под углом ψ, преломляется и попадает в глаз наблюдателя, расположенный на высоте h над поверхностью стола.

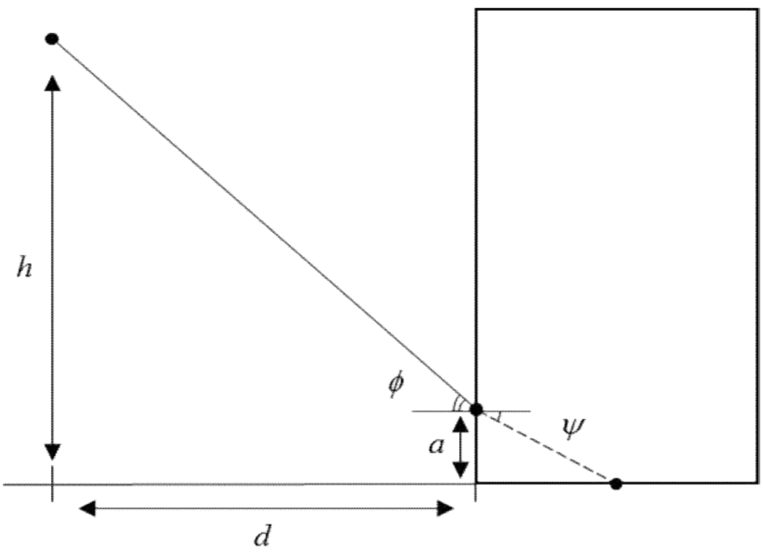


Рис. 1.

Значит, если определить, при каком угле наблюдения φ изображение монеты в смежной грани «пропадает» (см. рис. 2 и рис. 3), то можно с большой точностью вычислить значение показателя преломления исследуемой жидкости.

Рис. 2.

Рис. 3.

Для уменьшения погрешности эксперимента удобно использовать достаточно большое постоянное значение d ~ 1 м (см. рис. 1), и для каждой жидкости проводить серию измерений для 10–12 разных значений h, чтобы затем путем усреднения получить более точное значение показателя преломления. При таком методе абсолютная погрешность σ_d ~ 0,5 см, σ_h ~ 1 см (зависит от количества измерений в серии), относительная погрешность искомого показателя преломления жидкости ε_n ~ 1 ÷ 1,5%.

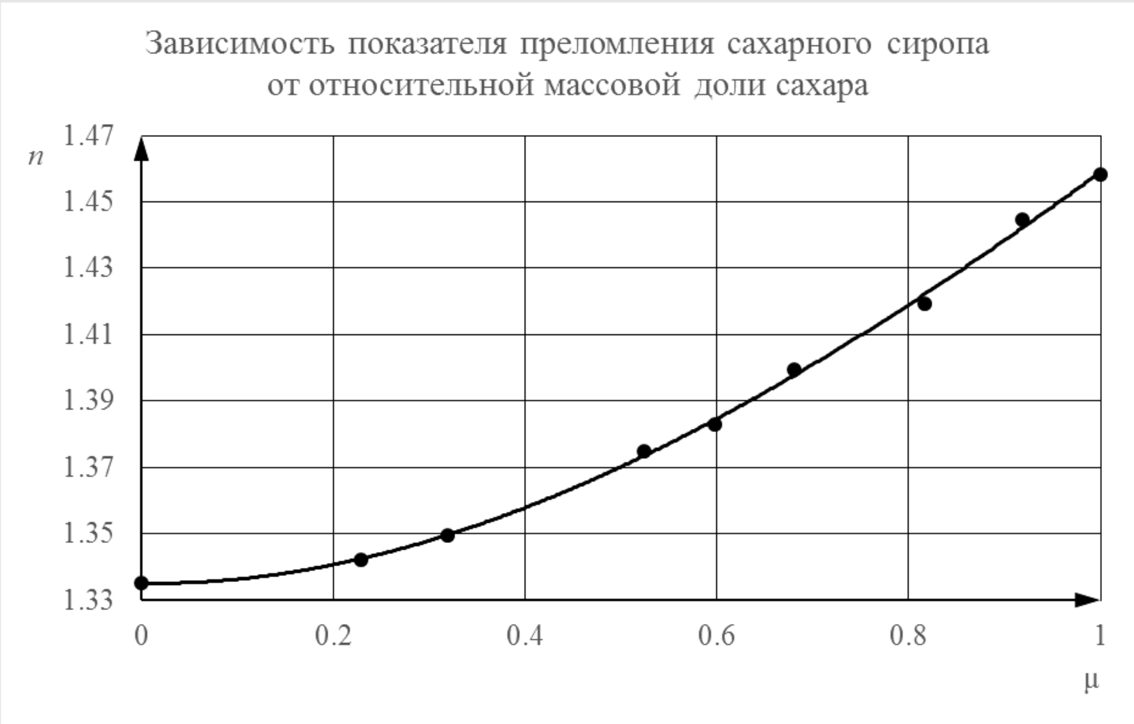
Описанный метод очень удобен при измерении показателей преломления сильнорассеивающих или непрозрачных жидкостей, так как толщина слоя жидкости очень мала, а значит эффект рассеяния света в жидкости незначительно влияет на проведение эксперимента. В рассматриваемой учебной задаче обучающимся предлагается измерить показатели преломления молока, глицерина, а также исследовать зависимость показателя преломления сахарного сиропа от относительной массовой доли сахара в сиропе. Первоначально обучающимся предоставляется сироп с массовой долей сахара около 70%, затем с помощью весов и воды эту массовую долю можно контролируемым образом уменьшать, разбавляя отдельные массы сиропа водой. Таким образом, новые массовые доли сахара в растворах можно выражать относительно массовой доли сахара в первоначальном «чистом» сиропе.

Ниже приведены контрольные экспериментальные результаты, полученные при выполнении данной учебной задачи.

Данная учебная задача может быть использована для создания задачи общего физического практикума. Также данная задача была представлена ученикам 10-го и 11-го классов [2] на IV Международной олимпиаде по экспериментальной физике (IEPhO) [1], проходившей с 26.11.2016 г. по 04.12.2016 г. Участникам должны были сами придумать метод измерения показателя преломления жидкости, но им требовалось определить только показатель преломления молока.

Жидкость	*Показатель преломления*	*Показатель преломления (табличный)*
Молоко	1,335 ± 0,017	1,333
Глицерин	1,480 ± 0,019	1,474

Масса «чистого» сиропа (г).	*Масса воды (г).*	*Относительная массовая доля сахара, μ.*	*Показатель преломления, n.*
50,0	0,0	1,00	1,458
55,5	4,9	0,92	1,445
37,0	8,3	0,82	1,419
24,7	11,6	0,68	1,399
24,7	16,6	0,60	1,383
41,7	37,9	0,52	1,375
6,6	14,1	0,32	1,349
9,6	32,4	0,23	1,342
0,0	50,0	0,00	1,335



Литература

1. http://www.iepho.com (сайт Международной олимпиады по экспериментальной физике «International Experimental Physics Olympiad»), проверено 03.03.2017.
2. http://iepho.com/media/filer_public/5d/10/5d10f824-f476-434d-bd33-133abea072f0/problem.pdf (условие задачи «Показатель преломления молока», которое было предложено участникам Олимпиады), проверено 03.03.2017.

ДИНАМИКА УСПЕВАЕМОСТИ УЧЕБНЫХ ГРУПП НА 1 И 2 КУРСАХ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ПО ДАННЫМ ТЕСТИРОВАНИЙ В ЦККО

с.н.с. *Терентьев М.А.*

На протяжении ряда лет Центр контроля качества образования физического факультета МГУ проводит поточные компьютерные тестирования текущих знаний студентов-физиков по основным преподаваемым дисциплинам. Тестирование зарекомендовало себя как достоверный оперативный инструмент проверки успеваемости, свободный от субъективного фактора и позволяющий оценить качество работы преподавателей в группах. Информация о работе ЦККО доступна на сайте http://ckko.phys.msu.ru/

Накапливаемые ЦККО данные об успеваемости открывают широкие возможности для анализа учебного процесса. Примеры такого анализа представлялены в [1–3]. Настоящая работа продолжает начатый в [3] анализ рейтингов учебных групп физического факультета МГУ, построенных по данным отдельных тестирований. Для анализа взяты средние баллы учебных групп 1 и 2 курсов, сформированные по итогам тестирований, проведённых ЦККО в осеннем семестре 2016/2017 учебного года. Посредством средних баллов анализируется динамика успеваемости учебных групп по выбранным дисциплинам в течение семестра. При этом акцентируется внимание на качестве преподавания в группах, ввиду чего средние баллы групп вычислены по фактической явке на тестирования, чтобы отсечь влияние неактивных неуспевающих студентов (явка на 1 курсе составила около 95%, а на 2 курсе — около 90%). Успеваемость одних и тех же групп в разных семестрах не сравнивалась, поскольку состав групп от семестра к семестру обычно претерпевает заметные изменения — часть студентов отчисляется по результатам сессии, ряд студентов восстанавливается на факультет, отдельные студенты переводятся между группами.

Сравнение средних баллов групп удобно проводить посредством сравнения отклонений этих средних баллов от среднего балла по курсу с нормировкой на средний балл по курсу. Такая нормировка выбрана для того, чтобы отклонение среднего балла группы от среднего по курсу выглядело тем более значимым, чем сложнее тест, поскольку среднее по курсу отражает сложность данного теста (для сложного теста разброс средних баллов групп будет больше, для простого — меньше). Для констатации корреляции отклонений в различных тестах достаточно, чтобы отклонения были направлены в одну сторону, а разница между ними была не слишком большой.

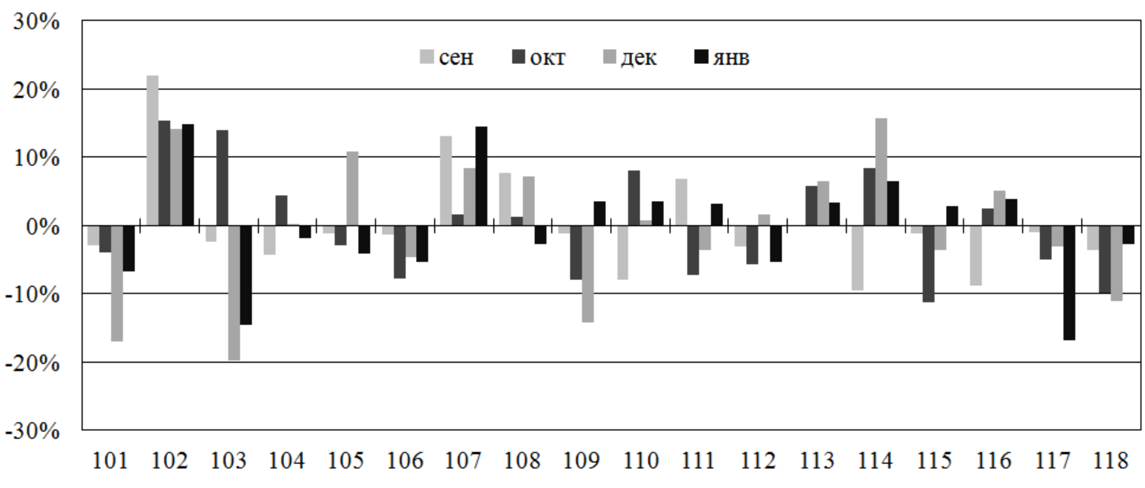


Рис. 1. Отклонения средних баллов групп от среднего по курсу в трёх тестах и экзамене по механике на 1 курсе в 2016/2017 гг.

Рассмотрим средние баллы групп 1 курса по данным вводного тестирования по механике (сентябрь), двух семестровых тестирований (октябрь–декабрь) и экзамена (январь) по механике в осеннем семестре (см. диаграмму). Так, группы 101, 103, 109 и 118 показали падение успеваемости в ходе семестра, что может говорить о недоработках преподавателей в этих группах. Напротив, группы 105, 114 и 116 показали рост успеваемости, что говорит об эффективной работе преподавателей в них. Средние же баллы остальных групп мало изменяются (с поправкой на случайные колебания).

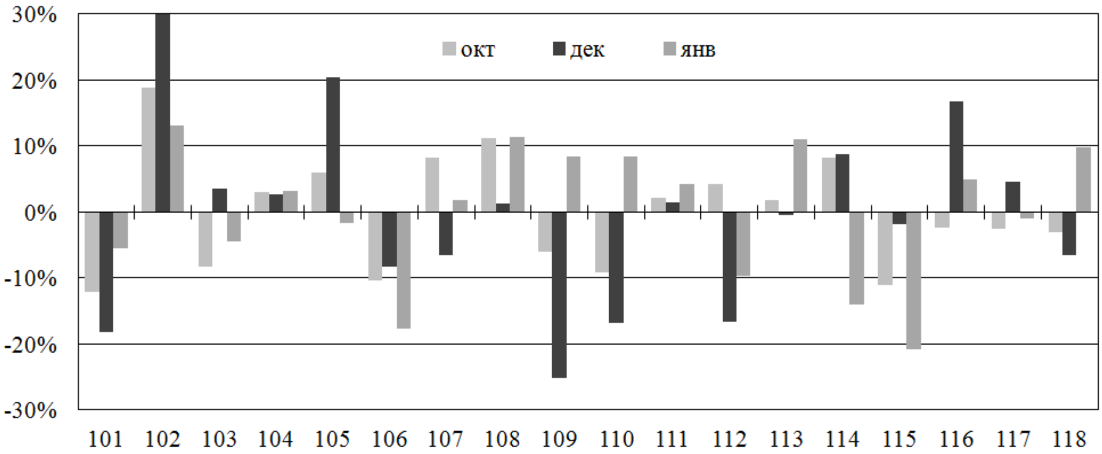


Рис. 2. Отклонения средних баллов групп от среднего по курсу в тестах по школьной математике, мат. анализу и экзамене по мат. анализу на 1 курсе в 2016/2017 гг.

Далее рассмотрим средние баллы групп 1 курса по данным вводного тестирования по школьной математике (октябрь), семестрового тестирования (декабрь) и экзамена (январь) по математическому анализу в осеннем семестре (см. диаграмму). Так, группы 101, 103, 106, 107, 109, 110 и 112 показали падение успеваемости в ходе семестра, что снова может говорить о недоработках преподавателей в этих группах. Напротив, группы 102, 105 и 116 показали рост успеваемости, что говорит об эффективной работе преподавателей в них.

Теперь рассмотрим средние баллы групп 2 курса по данным двух семестровых тестирований (октябрь и декабрь) и экзамена (январь) по электромагнетизму в осеннем семестре (см. диаграмму). Так, группы 211, 212 и 215 показали падение успеваемости в ходе семестра, что может говорить о недоработках преподавателей в этих группах. Напротив, группы 201, 202, 207, 213 и 214 показали рост успеваемости, что говорит об эффективной работе преподавателей в них.

Далее рассмотрим средние баллы групп 2 курса по данным двух семестровых тестирований (октябрь и декабрь) и экзамена (январь) по математическому анализу в осеннем семестре (см. диаграмму). Так, группы 204, 206 и 214 показали падение успеваемости в ходе семестра, что может говорить о недоработках преподавателей в этих группах. Напротив, группы 208, 209, 210, 212, 213 и 219 показали рост успеваемости, что говорит об эффективной работе преподавателей в них.

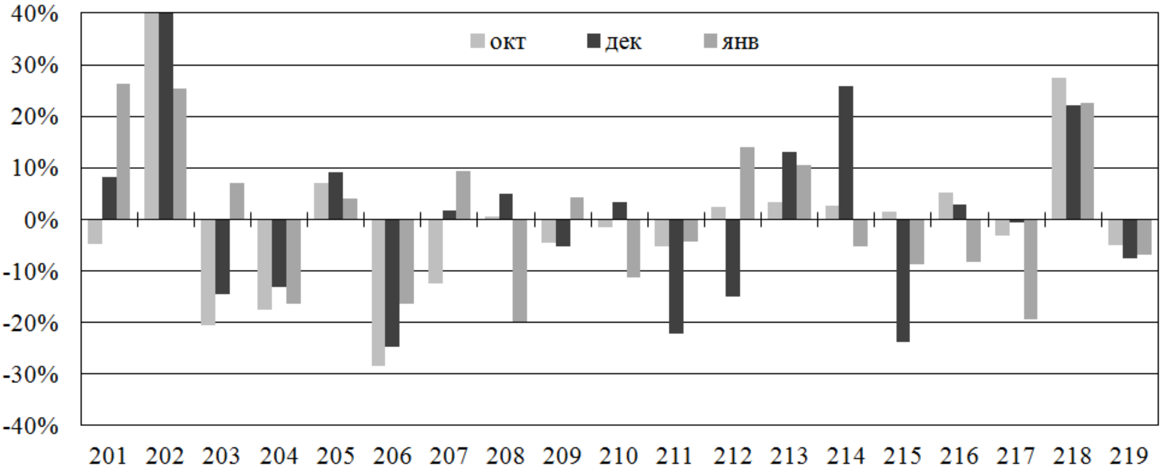


Рис. 3. Отклонения средних баллов групп от среднего по курсу в двух тестах и экзамене по электромагнетизму на 2 курсе в 2016/2017 гг.

Средние баллы групп по итогам тестирований и экзаменов в целом соотвествуют друг другу, хотя в отдельных случаях соответствия не наблюдается. По-видимому, на экзамене сказывается влияние субъективных факторов со стороны студентов и преподавателей (например, строгость или мягкость отдельных преподавателей). Кроме того, тесты и экзамены проверяют разные вещи — на экзаменах проверяется в основном знание теории, а тесты нацелены на проверку умения решать задачи.

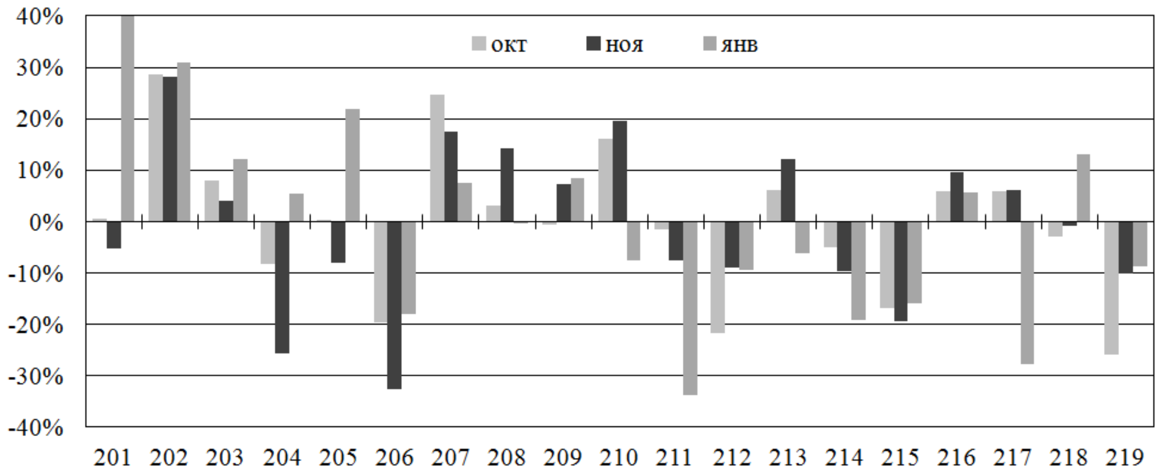


Рис. 4. Отклонения средних баллов групп от среднего по курсу в двух тестах и экзамене по математическому анализу на 2 курсе в 2016/2017 гг.

Более глубокий анализ результатов тестирований позволяет сравнить показатели решаемости того или иного раздела теста в различных группах. Здесь стабильно обнаруживается значительный разброс между группами — некоторые разделы дисциплин в отдельных группах изучаются либо поверхностно, либо не изучаются вовсе, что в конечном счёте сказывается на средних баллах групп.

В заключение отметим, что результаты анализа успеваемости учебных групп подтверждаются сведениями о работе преподавателей в группах из других источников (учебная часть, преподающие кафедры, мнения студентов).

Литература

1. Терентьев М.А. Итоги сессии и результаты тестирования // Научная конференция «Ломоносовские чтения». Секция физики. Сб. тезисов докладов. М: Физический факультет МГУ, 2014. Стр. 118–120.
2. Терентьев М.А. Рейтинг учебных достижений студентов по результатам тестирований // Научная конференция «Ломоносовские чтения». Секция физики. Сб. тезисов докладов. М: Физический факультет МГУ, 2015. Стр. 126–128.
3. Терентьев М.А. Рейтинг учебных групп физического факультета по данным тестирований // Научная конференция «Ломоносовские чтения». Секция физики. Сб. тезисов докладов. М: Физический факультет МГУ, 2016. Стр. 142–145.

ИЗУЧЕНИЕ ШКОЛЬНИКАМИ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К УЧАСТИЮ В ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ТУРАХ ОЛИМПИАД ПО ФИЗИКЕ

Доц. *Якута А.А.*, студ. *Тихонов П.С.*,
спец. по уч. метод. работе *Черников Ю.А.*
E-mail: paveltihonov@yandex.ru, chernikov@sch1329.ru,
yakuta.a.a@gmail.com

Необходимыми условиями для успешного выступления школьников на олимпиадах высокого уровня по физике (например, [1, 2]) являются выработка навыков решения задач экспериментального тура и закрепление у учащихся этих навыков. Методика решения олимпиадной задачи, как и возможные варианты использования оборудования, позволяющие её решить, часто оказываются довольно нестандартными, требующими от участника специальной подготовки [3]. На данный момент существует большое разнообразие экспериментальных задач. Однако для решения многих из них используется один и тот же набор приёмов. Выполнение таких однотипных задач позволяет развить и закрепить умение применять эти приёмы, однако отнимает много времени, которое может быть с большей пользой потрачено на приобретение других, не менее важных, умений. Поэтому возникает необходимость разработки комплекса учебных экспериментальных задач, которые наилучшим образом иллюстрируют применение важнейших навыков, востребованных не только при проведении конкретного эксперимента, но и в широком ряде других экспериментальных заданий.

Данный доклад посвящен описанию задач, посвящённых изучению различных видов деформаций. Задачи входят в комплекс базовых задач по механике, разработанный авторами доклада. Изучению деформаций посвящены четыре задачи. Ниже приведены их условия.

1. **Исследование «серого ящика» с пружинами.**

Задание: Внутри «серого ящика» находится система из трёх пружин, соединённых друг с другом (рис. 1). Наружу от этой системы пружин выведены крючки 1 и 2, которые могут перемещаться продольно. В точке A две пружины прикреплены к корпусу ящика. Упоры B и C ограничивают возможные перемещения крючков. В начальный момент пружины растянуты, их начальные деформации неизвестны. Определите жёсткости каждой из пружин при малых деформациях.

Оборудование: Исследуемый «серый ящик», динамометр, струбцина, миллиметровая бумага, скотч.

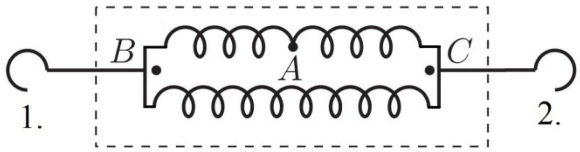


Рис. 1. Принципиальная схема «серого ящика».

2. **Определение коэффициента Пуассона.**

Задание: Получите экспериментально зависимость относительной длины l/l_0 резинового шнура от модуля приложенной к нему силы F вплоть до значений $l \approx 3l_0$, где l_0 — длина недеформированного шнура. Выразите коэффициент жёсткости резинового шнура через модуль Юнга резины и геометрические размеры шнура. Предполагая, что модуль Юнга и объём резины в процессе деформации не изменяются, получите теоретическую зависимость l/l_0 от F. Сравните экспериментально полученную зависимость с теоретической. Определите, до каких значений l/l_0 модуль Юнга можно считать постоянным. Рассчитайте модуль Юнга E резины. Найдите теоретически значение коэффициента Пуассона μ, при котором объём резинового шнура при деформациях не изменяется. Определите экспериментально коэффициент Пуассона резины, из которой изготовлена резиновая лента (бинт).

Оборудование: Резиновый шнур диаметром $d_0 = 2{,}5$ мм, резиновая лента (бинт), динамометр, две канцелярские клипсы, две струбцины, четыре деревянных бруска (два из них — со вкрученными винтами-саморезами), измерительная лента, линейка, ножницы, скотч.

3. Изучение кручения и изгиба линейки.

Задание: Рассмотрим деформацию кручения деревянной линейки. Угол поворота α одного торца линейки относительно другого зависит от момента M приложенной силы по закону $\alpha = \frac{6}{d} G^k a^m L^n M^p$, где d — толщина линейки, a — её ширина, L — длина части линейки, претерпевающей деформацию, G — модуль сдвига, а k, m, n и p — некоторые целые числа.

Соберите установку, изображённую на рисунке 2. Получите экспериментально зависимость угла поворота линейки α от момента сил M, приводящих к её кручению. Постройте график полученной зависимости. Определите показатель степени p. Получите экспериментально зависимость угла поворота торца линейки α от длины L части линейки, претерпевающей деформацию. Постройте график полученной зависимости. Определите показатель степени n. Зная коэффициенты n и p, найдите коэффициенты k и m. Вычислите величину модуля сдвига G. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2, толщина линейки $d = 2{,}5$ мм.

Оборудование: Две деревянных линейки длинами по 50 см; одна линейка длиной 20 см; струбцина; канцелярский зажим шириной 51 мм; груз массой 50 г; нить.

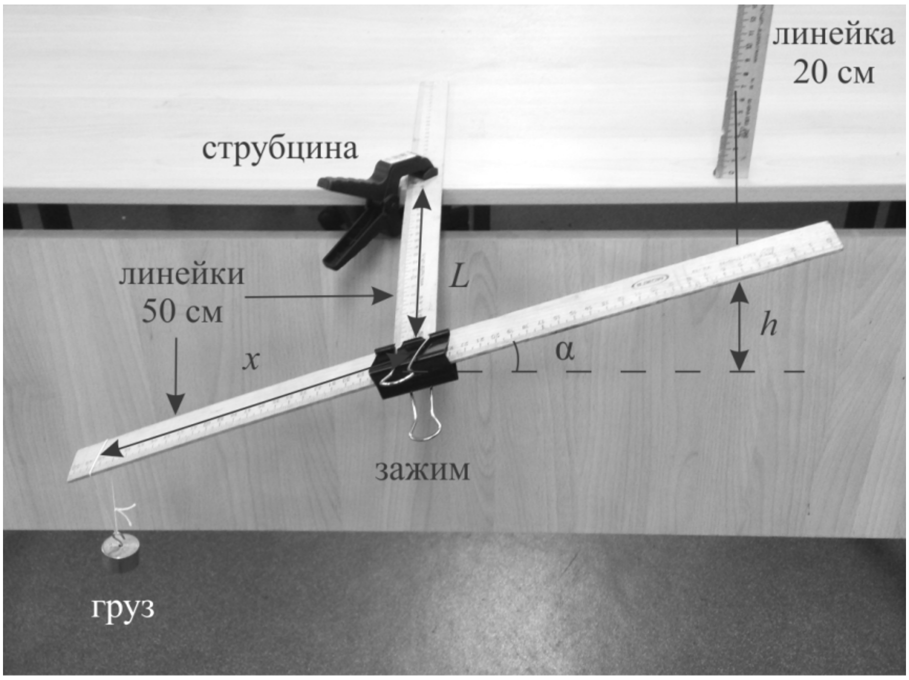


Рис. 2. Экспериментальная установка.

4. Изучение явления упругого гистерезиса.

Задание: Закрепите в штативе резинку длиной 10 см. Исследуйте зависимость удлинения резинки от массы подвешенного к ней груза. Проведите такие же измерения для куска резинки длиной 20 см. Постройте графики полученных зависимостей. Используя линейные участки графиков вычислите коэффициенты упругости для обеих резинок. Укажите погрешности этих коэффициентов. Используя полученные данные, рассчитайте энергию, поглощающуюся в резинках длиной 10 и 20 см при подвешивании к ним груза массой 500 г и последующей разгрузке до нерастянутого положения.

Указание: Все измерения деформаций проводите дважды — при нагрузке (последовательно увеличивая число подвешенных к резинке грузов) и при разгрузке (последовательно уменьшая число подвешенных грузов).

Оборудование: Резинки длинами 10 см и 20 см с закрепленными на их концах нитями, штатив с лапкой, измерительная лента, набор грузов массами 50 г (10 шт.), нитки, скотч.

Выполнение этих задач предполагает наличие у школьников базовых знаний по соответствующей теме, а также первичных навыков постановки и проведения экспериментов. В каждой задаче используется какой-либо новый (для школьника) способ измерений или обработки экспериментальных данных. При выполнении этих задач школьник должен самостоятельную разработать методику решения задачи, используя предложенное оборудование, собрать экспериментальную установку, провести измерения, провести обработку экспериментальных данных, оценить погрешности и представить итоговые результаты.

Все задачи были апробированы на занятиях, проводимых в кружках при подготовке школьников к олимпиадам, а также при проведении выездных физико-математических школ для одаренных детей [5]. Многие из школьников, выполнявших эти задачи в учебных целях, стали победителями и призёрами олимпиад высокого уровня по физике.

Литература

1. http://4ipho.ru/arhivy-zadach/arhivy-zadach-2009–2017 / (интернет-архив задач Всероссийской олимпиады по физике).
2. http://www.iepho.com (сайт Международной олимпиады по экспериментальной физике «International Experimental Physics Olympiad»).
3. Семенов М.В., Старокуров Ю.В., Якута А.А. Методические рекомендации по подготовке учащихся к участию в олимпиадах высокого уровня по физике. – М., Физический факультет МГУ, 2007.
4. Тихонов П.С., Черников Ю.А., Якута А.А., Зинковский В.И. Учебно-методические комплекты для подготовки школьников к участию в экспериментальных турах олимпиад по физике. // Физика в школе. – 2015 – 3. – С. 30–34.

5. Тихонов П.С., Черников Ю.А., Якута А.А. Опыт организации кружка по подготовке школьников к участию в экспериментальных турах олимпиад по физике. // Сборник трудов XIV Международной учебно-методической конференции «Современный физический практикум». – М., Издательский дом Московского физического общества. 2016 С. 252–253.

Подсекция:

НАУКИ О ЗЕМЛЕ

Сопредседатели
профессор М. А. Носов, академик И. И. Мохов,

профессор В. Б Лапшин

ПРИМЕНИМОСТЬ ДЛИННОВОЛНОВЫХ МОДЕЛЕЙ К ВОСПРОИЗВЕДЕНИЮ ДИНАМИКИ ЦУНАМИ

проф. *Носов М.А.*

В настоящее время численное моделирование представляет собой один из наиболее эффективных инструментов изучения и прогнозирования волн цунами [Shuto, 1991; Gisler, 2008; Носов, 2014; Levin, Nosov, 2016]. В научной литературе можно найти десятки упоминаний и подробных описаний специализированных программных средств (TUNAMI, MOST, NAMI DANCE, MGC и др.), предназначенных для численного воспроизведения динамики цунами [Liu et al., 1998; Titov et al., 2003; Fine et al., 2005; Imamura et al., 2006; Fujii, Satake 2007; Kowalik et al., 2007; Shokin et al., 2008; Harig et al., 2008; Yamazaki et al., 2009; Zaytsev et al., 2010; LeVeque et al., 2011; Nicolsky et al., 2011; Nosov et al., 2013].

В большинстве случаев модели цунами строятся в гидростатическом приближении на основе теории длинных волн, которую часто также называют теория мелкой воды. В рамках теории длинных волн пренебрегают вертикальной структурой потока, оперируя только горизонтальными скоростями течения, усредненными или проинтегрированными по вертикальной координате. Такой подход позволяет свести исходную трехмерную гидродинамическую задачу к более простой плоской (двумерной) задаче. Главным недостатком двумерных моделей, построенных на основе теории длинных волн, является их неспособность воспроизводить эффекты фазовой дисперсии, которые, вообще говоря, присущи волнам цунами (см. рис. 1) [Куликов, Гонзалес, 1995; Куликов и др., 2005; Watada et al., 2014; Levin, Nosov, 2016]. Впрочем, несмотря на этот недостаток, длинноволновые модели еще долго будут оставаться востребованными в силу того, что они достаточно адекватно отражают физическую сущность рассматриваемого явления (цунами, как правило, представляют собой достаточно длинные волны) и, кроме того, численное решение двумерной задачи, по сравнению с трехмерной, сопряжено с относительно небольшим объемом вычислений. Следует заметить, что в двумерных моделях, в принципе, возможен учет слабой дисперсии (приближение Буссинеска) [Løvholt et al., 2010; Shi et al., 2012].

Наиболее распространенным подходом к численному решению уравнений теории длинных волн, описывающих динамику цунами, является метод конечных разностей, использующий структурированные (регулярные) сетки. В тех случаях, когда требуется детальное описание структуры волнового поля в некоторой заранее определенной области, применяют метод вложенных сеток (nested grids). При этом в расчетной области выделяют одну или несколько (обычно прямоугольных) подобластей 1-го уровня, шаг сетки в которых измельчается. В подобласти 1-го уровня могут быть выделены подобласти 2-го уровня, в которых происходит дальнейшее измельчение сетки, и т.д. На границе между подобластями n и n+1 уровней решение динамически сшивается.

Кроме метода конечных разностей, для численного решения уравнений мелкой воды применяют также метод конечных элементов с использованием неструктурированных сеток (с переменным шагом) [Piatanesi et al., 1999; Walters, 2006; Zhang, Baptista, 2008; Androsov et al., 2011]. Метод конечных элементов обладает важным преимуществом: неструктурированные сетки легче адаптируются к сложной форме расчетной области, и допускают плавное сгущение сетки там, где требуется повышенное пространственное разрешение.

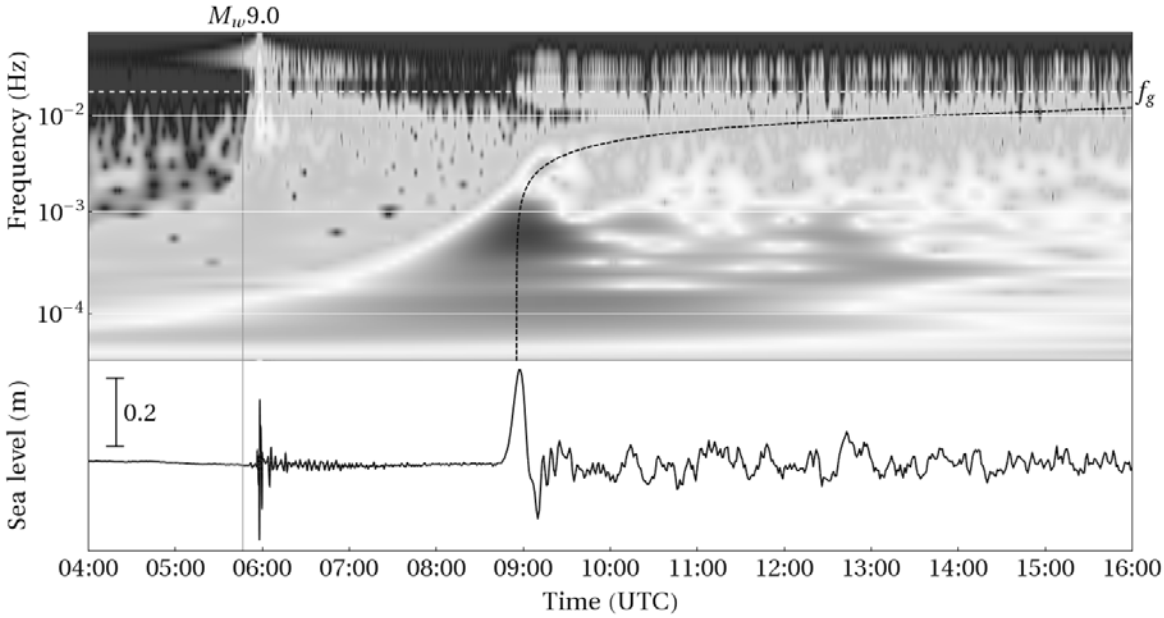


Рис. 1. Проявления фазовой дисперсии волн цунами. Вариации уровня моря, зарегистрированные глубоководной станцией DART21415 во время цунами 11 марта 2011 г и спектрограмма сигнала. Отмечен момент времени, соответствующий началу землетрясения (Mw=9.0). Черной пунктирной линией показана теоретическая оценка времени вступления сигнала, рассчитанная по формуле D/C_{gr}, где D — расстояние между станцией и эпицентром землетрясения, C_{gr} — групповая скорость гравитационных волн.

В последние годы стали появляться работы, в которых при моделировании цунами используют динамически адаптивные сетки [LeVeque et al., 2011; Popinet, 2012; Liang et al., 2015]. Основная идея этого подхода состоит в измельчении сетки в тех зонах расчетной области и в то время, где и когда решению свойственна мелкомасштабная структура. Применение динамически адаптивных сеток, по-видимому, представляет собой оптимальный вариант для решения нелинейных задач (например, описание наката цунами на берег), когда о структуре искомых гидродинамических полей трудно или невозможно заранее сделать однозначные предположения. Но для решения линейной задачи об описании динамики волн цунами на больших глубинах, где скорость волн определяется только глубиной океана, расчетная сетка может быть адаптирована к распределению глубин заранее и оставаться неизменной в процессе моделирования. Здесь важно заметить, что динамика цунами описывается линейными уравнениями практически во всей расчетной области за исключением узкой прибрежной (мелководной) полосы и зоны наката.

Для определенности будем полагать, что «линейная зона» динамики цунами ограничена некоторой изобатой $H_{\min}$. Критерием для определения величины $H_{\min}$ служит условие малости амплитуды волны A по сравнению с глубиной океана: $A/H_{\min} \ll 1$. На практике, в зависимости от амплитуды волн, значение величины $H_{\min}$ обычно лежит в диапазоне $\sim 10-100$ м.

Известно, что линейные длинные гравитационные волны распространяются со скоростью $(gH)^{1/2}$, где H — глубина бассейна, g — ускорение силы тяжести. Длинные волны представляют собой простейшую модель волновых движений в океане, которая, как уже отмечалось, не описывает эффекты фазовой дисперсия, свойственные любым гравитационным волнам на воде. Гравитационным волнам диапазона периодов цунами ($\sim 10^2$–10^4 с) присуща нормальная дисперсия, которая приводит к специфической трансформации волнового возмущения по мере его распространения: длинноволновые компоненты опережают коротковолновые (см. рис. 1). Поэтому применение длинноволнового приближения для описания цунами возможно не всегда, а только при условии незначительности дисперсионных эффектов. Для четкой количественной формулировки такого условия введем две взаимосвязанные величины: τ_0 (время дисперсионного разрушения) и $L_0 = \tau_0(gH)^{1/2}$ (расстояние дисперсионного разрушения) [Kulikov et al., 1996; Levin, Nosov, 2016]. Физический смысл величины τ_0 — время, за которое волновой пакет отстанет от фронта на длину волны. Физический смысл величины L_0 — расстояние, при распространении на которое волновой пакет отстанет от фронта на длину волны. Формула для расчета времени и расстояния дисперсионного разрушения имеют следующий вид:

$$\tau_0 = \frac{\lambda}{(gH)^{1/2} - C_{gr}}, \tag{1}$$

$$L_0 = \frac{\lambda (gH)^{1/2}}{(gH)^{1/2} - C_{gr}}, \tag{2}$$

где $C_{gr} = d\omega/dk$ — групповая скорость гравитационных волн на воде. Связь между циклической частотой ω и волновым числом k ($k = 2\pi/\lambda$) определяется известным дисперсионным соотношением [Лакомб, 1974]: $\omega^2 = gk\tanh(kH)$.

Из формул (1), (2) следует, что абсолютное пренебрежение дисперсией возможно только для бесконечно длинных волн: $\lim\limits_{\lambda/H\to\infty} L_0 = \infty$. Такой предельный случай, разумеется, невозможен в реальных природных условиях. Однако в природе часто реализуется ситуация, когда длина волны существенно превосходит глубину океана: $\lambda / H >> 1$. При выполнении этого условия формулы (1), (2) могут быть заменены приближенными выражениями, которые удобны в применении на практике

$$\tau_0 \approx \frac{T^3 g}{2\pi^2 H}, \tag{3}$$

$$L_0 \approx \frac{T^3 g^{3/2}}{2\pi^2 H^{1/2}}, \tag{4}$$

где T $(T = 2\pi / \omega)$ — период волн.

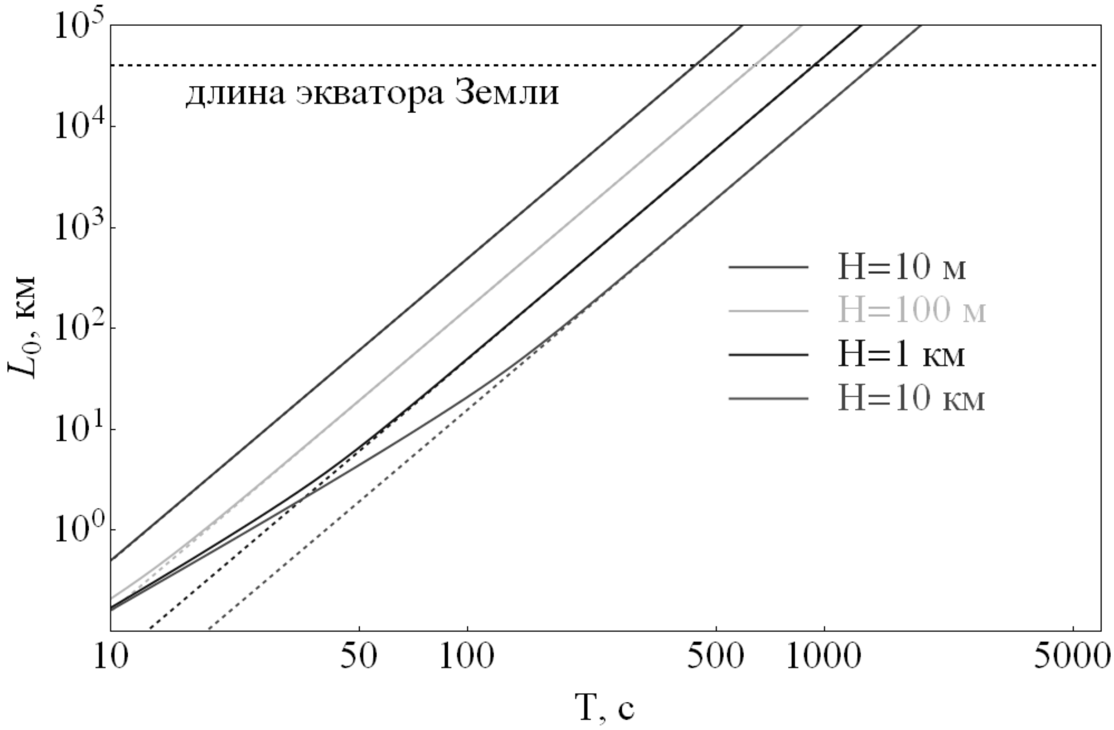


Рис. 2. Расстояние дисперсионного разрушения как функция периода волн. Сплошные кривые рассчитаны по точной формуле (2), пунктирные кривые — по приближенной формуле (4). Расчет выполнен при различных значениях глубин, перекрывающих диапазон изменения величины H в реальных условиях.

На рис. 2 представлена зависимость расстояния дисперсионного разрушения от периода волны. Сплошные кривые рассчитаны по точной формуле (2). Пунктиром показаны кривые, рассчитанные по приближенной формуле (4). Расчет выполнен при различных значениях глубин, перекрывающих диапазон изменения величины H в реальных условиях. Видно, что в диапазоне периодов волн цунами (~10^2–10^4 с) приближенная зависимость практически всегда с хорошей точностью может заменить точную формулу (2). Незначительные различия наблюдаются только при максимально больших глубинах (~10 км) и минимальных периодах (~100 с) волн цунами.

Рис. 2 позволяет заключить, что дисперсионное разрушение короткопериодных цунами (T~100 с) происходит на расстояниях всего ~10–100 км (в зависимости от глубины океана). Волны с периодом T~1000 с можно считать фактически недиспергирующими, т.к при таком большом периоде длина дисперсионного разрушения становится порядка длины экватора Земли.

Формально выражения (1)–(4) имеют силу для бассейна с плоским горизонтальным дном ($H = \mathrm{const}$). В дальнейшем мы будем полагать, что аналогичные соотношения могут быть использованы также и для реального океана переменной глубины. Но при этом в качестве величины H выступает некоторая «средняя» глубина океана в рассматриваемой области H_{av}.

Сформулируем условие применимости теории длинных волн для описания цунами. Длинноволновая модель может быть использована, если расчет ведется до времен, не превышающих время дисперсионного разрушения: $t < \tau_0$. Это условие является необходимым и достаточным. Используя выражение (3) получаем удобную для применения на практике формулу, ограничивающую период воспроизводимых моделью волн:

$$T > T_{min} \equiv \left(\frac{2\pi^2 H_{av}}{g} t \right)^{1/3}. \qquad (5)$$

Обычно при моделировании цунами расчет ведется до времени, за которое волна пересечет расчетную область. Поэтому размер расчетной области L и время распространения t можно считать связаными между собой соотношением $L \sim t(gH_{av})^{1/2}$. Опираясь на величины L и L_0, можно предложить еще одну форму условия применимости теории длинных волн: длинноволновая модель может быть использована, если размер расчетной области L не превосходит расстояние дисперсионного разрушения: $L < L_0$. Соответствующее условие на период воспроизводимых волн, имеет следующий вид:

$$T > T_{min} \equiv \frac{(2\pi^2 H_{av}{}^{1/2} L)^{1/3}}{g^{1/2}}. \qquad (6)$$

Условие (6) означает, что длинноволновая модель способна адекватно воспроизводить волны цунами в области, характеризующейся горизонтальной протяженностью L и глубиной океана H_{av}, только при условии, что период воспроизводимых волн превосходит величину T_{min}.

Зависимость (6) представлена на рис. 3 в форме изолиний, которые построены для фиксированных значений величины T_{min} (цифры у изолиний — период в секундах) на плоскости «глубина океана» — «размер расчетной области». Из рисунка видно, что для короткопериодных цунами (T ~ 100 с) длинноволновая модель работоспособна до расстояний не более 100 км и только в случае шельфовых глубин ($H_{av} \sim 100\,\text{м}$). При глубинах в несколько километров длинноволновая модель становится неприменимой: дисперсия заметно исказит волны на расстоянии всего в несколько десятков километров. Если размер расчетной области составляет ~1000 км, а глубина океана 3–5 км, то применение теории длинных волн возможно для волн с периодами не менее 300–400 с. Трансокеанское распространение цунами (размер области более 10 тыс. км, глубина 4–5 км) будет корректно описываться только в том случае, если период волн превысит 700 с.

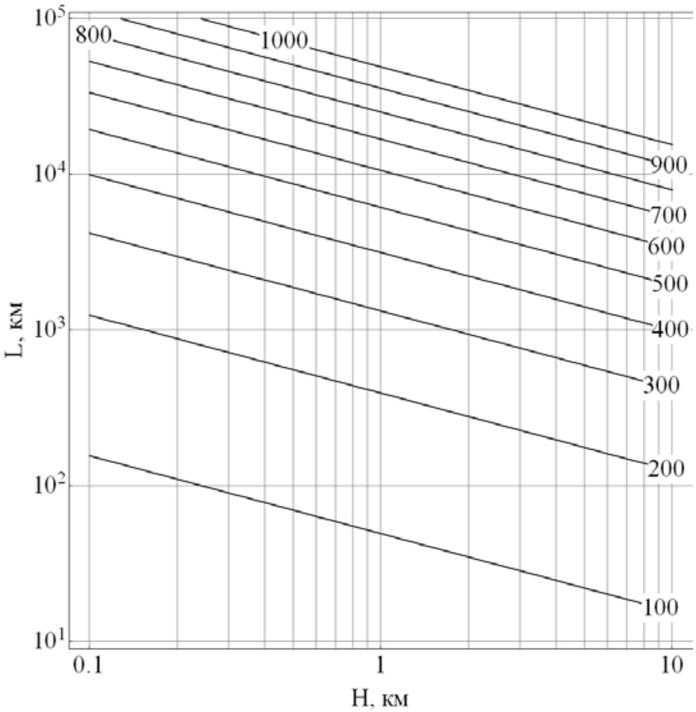


Рис. 3. Минимальный период волн, адекватно воспроизводимых длинноволновой моделью, в зависимости от горизонтальной протяженности расчетной области и глубины океана. Цифры у изолиний — значения периода в секундах.

Процесс генерации цунами обычно описывается путем задания некоторого начального возвышения свободной поверхности воды при нулевом поле скорости течения [Levin, Nosov, 2016]. Начальное возвышение полагается либо равным вертикальной компоненте косейсмической деформации дна океана [Titov, 2003; Zaytsev et al., 2010; Popinet, 2012], либо рассчитывается из решения специальной задачи по векторному полю косейсмической деформации дна и распределению глубин [Nosov, Kolesov, 2011; Файн, Куликов, 2011; Носов, Семенцов, 2014]. И в первом, и во втором случае возмущение, вводимое в длинноволновую модель, может включать в себя короткопериодные спектральные компоненты ($T < T_{min}$). Поэтому, для корректной работы длинноволновой модели, начальное возвышение должно быть сглажено таким образом, чтобы исключить подверженные дисперсии короткопериодные компоненты. Если процедуру сглаживания не проводить, то короткопериодные компоненты, распространяясь со скоростью $(gH)^{1/2}$, предписываемой длинноволновой моделью, т.е. быстрее, чем в природе, неминуемо исказят волновое поле, и амплитуда цунами будет переоценена.

Итак, первая процедура, которую необходимо выполнить перед моделированием волн цунами в рамках теории длинных волн, состоит в сглаживании исходного возмущения, которое исключит из рассмотрения коротокопериодные компоненты $T < T_{min}$. Период среза фильтра T_{min} следует оценивать в соответствии с формулой (6) по размеру расчетной области L и типичной (средней) глубине океана в этой области H_{av}. В качестве величины L, например, может быть выбрана длина диагонали прямоугольной расчетной области (в сферических координатах — соответствующая длина дуги большого круга), а в качестве величины H_{av} — среднее арифметическое значений глубин океана в узлах равномерной сетки исходных батиметрических данных. Впрочем, методика определения величин L и H_{av} не имеет принципиального значения. Дело в том, что величина T_{min} довольно слабо зависит от размера расчетной области и глубины океана: $T_{min} \sim {H_{av}}^{1/6} L^{1/3}$.

Процедура сглаживания или фильтрации, которая определяет минимальный период волн, воспроизводимых длинноволновой моделью, имеет еще одно важное значение. Зная величину T_{min}, можно однозначно определить минимальную длину волны $\lambda_{min} = T_{min}(gH)^{1/2}$, с которой связан шаг сетки по пространству Δ. В соответствии с теоремой Котельникова (Nyquist–Shannon–Kotelnikov theorem), следует потребовать, чтобы на одну длину волны приходилось по крайней мере два шага сетки: $\lambda_{min} \geq 2\Delta$. При использовании регулярных сеток это требование можно удовлетворить только путем задания малого шага по пространству во всей расчетной области, что приводит к резкому росту вычислительной трудоемкости задачи. Совсем иные возможности открывает здесь применение неструктурированных сеток. Пусть шаг неструктурированной сетки определяется формулой

$$\Delta(H) = \Delta_{min}(H / H_{min})^{1/2}, \tag{7}$$

где Δ_{min} — минимальный шаг сетки, устанавливаемый в окрестности точки с минимальной глубиной H_{min}. Если следовать формуле (7), то для волн, скорость которых пропорциональна $H^{1/2}$, на длину волны всегда будет приходится фиксированное число шагов сетки по пространству. Применение такой неструктурированной сетки позволяет достичь заметного снижения вычислительной трудоемкости задачи при сохранении необходимого пространственного разрешения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №16-55-50018, №16-05-00053).

Литература

1. Куликов Е.А., Гонзалес Ф.И. Восстановление формы сигнала цунами в источнике по измерениям колебаний уровня океана удаленным датчиком гидростатического давления // ДАН СССР, 1995, т. 344, № 6, с. 814–818.
2. Куликов Е.А., Медведев П.П., Лаппо С.С. Регистрация из космоса цунами 26 декабря 2004 г. в Индийском океане // ДАН, 2005. Т. 401, № 4, с. 537–542.

3. Лакомб А. Физическая океанография. М.: Мир, 1974.
4. Носов М.А. Волны цунами сейсмического происхождения: современное состояние проблемы // Известия РАН. Физика атмосферы и океана, 2014, т. 50, № 5, с. 540–551.
5. Носов М.А., Семенцов К.А. Расчет начального возвышения в очаге цунами с использованием аналитических решений. // Известия РАН. Физика атмосферы и океана, 2014, т. 50, № 5, с. 612–620.
6. Файн И.В., Куликов Е.А. Расчет смещений поверхности океана в очаге цунами, вызываемых мгновенной вертикальной подвижкой дна при подводном землетрясении // Вычислительные технологии, 2011, т. 16, № 2, с. 111–118.
7. Androsov A., Behrens J., Danilov S. Tsunami Modelling with Unstructured Grids // Interaction between Tides and Tsunami Waves. Computational Science and High Performance Computing IV Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design, 2011, v. 115. p. 191–206.
8. Fine I.V., Rabinovich A.B., Bornhold B.D., Thomson R.E., Kulikov E.A.. The Grand Banks landslide-generated tsunami of November 18, 1929: Preliminary analysis and numerical modeling // Marine Geology, 2005, v. 215. p. 45–57.
9. Fujii Y., Satake K. Tsunami Source of the 2004 Sumatra–Andaman Earthquake Inferred from Tide Gauge and Satellite Data // Bulletin of the Seismological Society of America, 2007, v. 97, № 1 A, p. S192–S207.
10. Gisler G.R. Tsunami simulations //Annu. Rev. Fluid Mech. – 2008. – V. 40. – P. 71–90.
11. Harig S., Chaeroni C., Pranowo W.S., Behrens J. Tsunami simulations on several scales: Comparison of approaches with unstructured meshes and nested grids // Ocean Dynamics, 2008, v. 58. p. 429–440.
12. Imamura F., Yalciner A.C., Ozyurt G. Tsunami Modelling Manual (TUNAMI model). Revision due on APRIL 2006. 58 p.
13. Kowalik Z., Knight W., Logan T., Whitmore P. The tsunami of 26 December, 2004: numerical modeling and energy considerations // Pure Appl. Geophys., 2007, v. 164. p. 379–393.
14. Kulikov E.A., Rabinovich A.B., Thomson R.E., Bornhold B.D. The landslide tsunami of November 3, 1994. Skagway Harbor. Alaska // J. Geophys. Res., 1996, v. 101, № C 3, p. 6609–6615.
15. LeVeque R.J., George D.L., Berger M.J. Tsunami modelling with adaptively refined finite volume methods // Acta Numerica, 2011, v. 20. p. 211–289.
16. Levin B.W., Nosov M.A. Physics of Tsunamis, Second Edition. – Cham-Heidelberg-New York-Dordrecht-London. Springer, 2016, 388 p.
17. Liang Q., Hou J., Amouzgar R. Simulation of Tsunami Propagation Using Adaptive Cartesian Grids //Coastal Engineering Journal, 2015, v. 57, № 4, 1550016.
18. Liu P.L.F., Woo S.B., Cho Y.S. Computer programs for tsunami propagation and inundation. Tech. rep. Cornell University, 1998, 104 p.

19. Løvholt F., Pedersen G., Glimsdal S. Coupling of Dispersive Tsunami Propagation and Shallow Water Coastal Response // The Open Oceanography Journal, 2010, v. 4, p. 71–82.
20. Nicolsky D.J., Suleimani E.N., Hansen R.A. Validation and Verification of a Numerical Model for Tsunami Propagation and Runup // Pure Appl. Geophys., 2011, v. 168, № 6–7, p. 1199–1222.
21. Nosov M.A., Kolesov S. V. Optimal Initial Conditions for Simulation of Seismotectonic Tsunamis // Pure and Applied Geophysics, 2011, v. 168, № 6–7, p. 1223–1237.
22. Nosov M.A., Moshenceva A.V., Kolesov S.V. Horizontal motions of water in the vicinity of a tsunami source // Pure Appl. Geophys., 2013, v. 170. № 9–10, p. 1647–1660.
23. Piatanesi A., Tinti S., Bortolucci E. Finite-element simulations of the 28 December 1908 Messina straits (Southern Italy) tsunami // Phys. Chem. Earth (A), 1999, v. 24, p. 145–150.
24. Popinet S.. Adaptive modelling of long-distance wave propagation and fine-scale flooding during the Tohoku tsunami // Nat. Hazards Earth Syst. Sci., 2012, v. 12, p. 1213–1227.
25. Shi F., Kirby J.T., Harris J.C., Geiman J.D., Grilli S.T. A high-order adaptive time-stepping TVD solver for Boussinesq modeling of breaking waves and coastal inundation // Ocean Modelling, 2012, v. 43–44, p. 36–51.
26. Shokin Yu.I., Babailov V.V., Beisel S.A., Chubarov L.B., Eletsky S.V., Fedotova Z.I., Gusyakov V.K.. Mathematical Modeling in application to regional tsunami warning systems operations // Computational Science and High Performance Computing III, Springer. Notes on numerical fluid mechanics and multidisciplinary design, 2008, v. 101. p. 52–68.
27. Shuto N. Numerical simulation of tsunamis—Its present and near future //Natural Hazards. – 1991. – V. 4. – №. 2–3. – P. 171–191.
28. Titov V.V., Gonzalez F.I., Mofjeld H.O., Venturato A.J. NOAA Time Seattle Tsunami Mapping Project: Procedures, Data Sources, and Products. NOAA Technical Memorandum OAR PMEL-124, 2003, 21 p.
29. Walters R.A. Design considerations for a finite element coastal ocean model // Ocean Modelling, 2006, v. 15, p. 90–100.
30. Watada S., Kusumoto S., Satake K. Traveltime delay and initial phase reversal of distant tsunamis coupled with the self-gravitating elastic earth // J. Geophys. Res. Solid Earth, 2014, v. 119, p. 4287–4310.
31. Yamazaki Y., Kowalik Z., Cheung K.F. Depth-integrated, non-hydrostatic model for wave breaking and run-up // Int. J. Numer. Meth. Fluids, 2009, v. 61. p. 473–497.
32. Zaytsev A.I., Chernov A.G., Yalciner A.C., Pelinovsky E.N., Kurkin A.A.. MANUAL Tsunami Simulation/Visualization Code NAMI DANCE versions 4.9, 2010.
33. Zhang Y.J., Baptista A.M. An Efficient and Robust Tsunami Model on Unstructured Grids. Part I: Inundation Benchmarks // Pure Appl. Geophys., 2008, v. 165, p. 2229–2248.

ИССЛЕДОВАНИЕ СЕЙСМИЧЕСКОГО РЕЖИМА РЕГИОНА КОЙНА-ВАРНА, ЗАПАДНАЯ ИНДИЯ, ПО НОВЫМ ДАННЫМ

Ас. *М.Г. Потанина*, проф. *Р. Чадда*, доц. *В.Б. Смирнов*, проф. *Д. Шринагеш*, д.ф-м.н. *А.В. Пономарев*, проф. *К. Арора*, проф. *В.О. Михайлов*, студ. *И.И. Карташов*, н.с. *С.М. Строганова*

Выполнен анализ сезонной цикличности сейсмической активности в районе Койна-Варна за весь период сейсмических инструментальных наблюдений. В результате уточнена структура сезонных вариаций и выявлены закономерности ее изменения во времени. Сезонная сейсмическая активность минимальна в мае–июне, когда минимален уровень воды в водохранилищах. В остальное время года выделяются три пика активности: осенью в сентябре, зимой в ноябре–декабре и весной в феврале–апреле. Первый из этих пиков приходится на фазу достижения уровнем воды максимального сезонного значения и может рассматриваться как немедленная реакция среды на приложенное воздействие. Два последующих максимума приходятся на фазу уменьшения уровня и могут рассматриваться как отложенная реакция. В целом отложенная весенняя активность после заполнения водохранилища Койна существенно слабее осенней, а после заполнения водохранилища Варна наблюдается обратное соотношение. Кроме этого, относительная интенсивность сезонных компонент меняется во времени. Вопрос о механизмах изменчивости сезонных компонент наведенной сейсмичности является открытым, но можно предположить, что они связаны с изменением напряженно-деформированного состояния среды, в частности, после сильных сейсмических событий и с миграцией наведенной сейсмичности от района Койна, где происходили сдвиговые подвижки на субвертикальных разломах, на юг, к водохранилищу Варна, где преобладают нормальные сбросы, которые происходят на более пологих тектонических нарушениях.

Анализ вариации в течение цикла изменения за год уровня воды в водохранилищах наклона графика повторяемости землетрясений по накопленному каталогу за период с 1983 по 2015 год, исключая года, в которых были сильные события и афтершоки (1999, 2000, 2005) показал характерный противофазный ход графиков наклона повторяемости и сейсмической активности (рис. 1). Представительная магнитуда равна 3.

Частично результаты выполненной работы опубликованы в статье Смирнов и др., 2017.

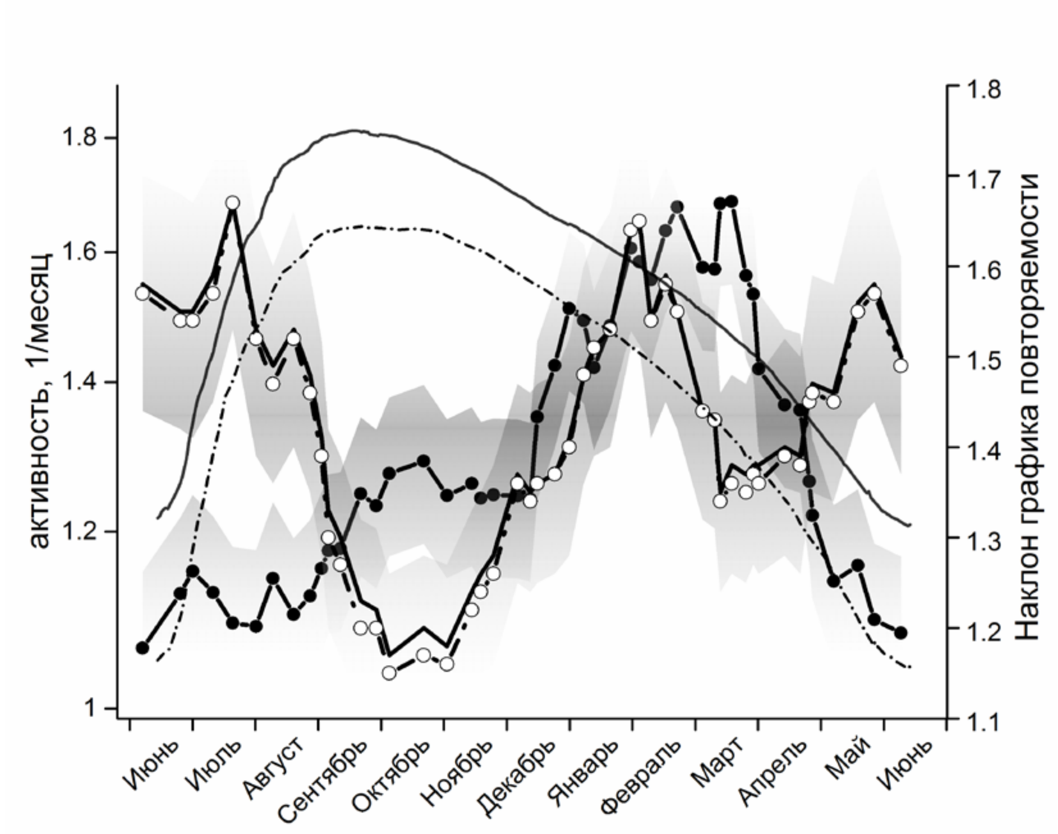


Рис. 1. Результат расчета в скользящем событийном окне с перекрытием за год наклона графика повторяемости (линия с выколотыми точками) и сейсмической активности (линия с черными точками) по накопленному каталогу за время с 1983 по 2015 года, исключая 1999, 2000 и 2005 годы. Представительная магнитуда 3. Сплошной и прерывистой линиями показаны вариации среднего уровня воды за год в Койне и Варне соответственно.

Литература

1. Смирнов В.Б., Шринагеш Д, Пономарев А.В., Чадда Р., Михайлов В.О., Потанина М.Г., Карташов И.М., Строганова СМ. Режим сезонных вариаций наведенной сейсмичности в области водохранилищ Койна-Варна, Западная Индия. Физика Земли, №3, с. 1–10, 2017.

ПАРАМЕТР ЦУНАМИГЕННОСТИ ПОДВОДНОГО ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ

Инж. *Большакова А.В.*, м. н. с. *Колесов С.В.*,
проф. *Носов М.А.*, асп. *Нурисламова Г.Н.*

С начала 21 века произошло 16 крупных событий, которые унесли жизни 248063 человек [Tsunami Glossary, 2016]. Катастрофические последствия наиболее крупных событий ясно показали, что задача точного и оперативного прогноза и оценки степени опасности цунами еще далека от окончательного решения.

В настоящее время оперативный прогноз цунами базируется на магнитудно- географическом критерии [Operational Users Guide…2009; Поплавский и др., 2009]. То есть тревога цунами подается в любом случае при фиксировании факта возникновения землетрясения в определенном районе океана или моря (цунамигенная зона) с магнитудой выше принятой пороговой. Для Курило-Камчатского региона России, которое подвержено опасности возникновения цунами, ее величина составляет M = 7. Данный регламент принятия решения о возможности возникновения цунами позволяет получить достаточную заблаговременность для большинства угрожаемых районов, но, к сожалению, может привести к большому количеству ложных тревог. Это происходит из-за недостаточной четкости критерия цунамигенности землетрясения, т.к. далеко на каждое землетрясение с магнитудой выше пороговой способно вызвать разрушительные волны цунами.

Эту особенность хорошо видно в зависимости между интенсивностью цунами и магнитудой землетрясения, которая характеризуется очень большим разбросом данных. При фиксированном значении магнитуды интенсивность цунами может отличаться на 6 баллов, что соответствует разбросу в высотах заплеска цунами до 64 раз. Т.о. прогноз, основанный на магнитудно-географическом критерии, является не очень надежным, и может сопровождаться ложными тревогами.

Примером объявления ложной тревоги может быть землетрясения в Охотском море (24.05.2013, M=8.3[USGS]), когда, в соответствии с регламентом ИОЦ «Южно-Сахалинск», была объявлена тревога цунами по охотоморскому побережью Сахалина и Курильских островов [Российская служба предупреждения о цунами]. Позднее был объявлен отбой тревоги цунами в связи с глубоким расположением гипоцентра.

Приведенный пример показывает, что одной из важнейших задач в системах предупреждения о цунами является задача четкого и достоверного прогноза цунами и выявления надежных и независимых критериев цунамигенности произошедшего подводного землетрясения.

В данной работе рассматриваются и вводятся критерии цунамигенности сейсмического события по данным о механизме и глубине очага землетрясения, которые доступны в оперативном режиме. Необходимые данные заимствованы из каталогов CMT и USGS. По полученным данным о механизме и глубине очага землетрясения с привлечением эмпирических закономерностей и формул Окада [Okada, 1985] рассчитывается векторное поле косейсмической деформации в очаге цунами. В дальнейшем векторное поле деформации дна пересчитывается в начальное возвышение водной поверхности в источнике цунами. Пересчет выполняется с учетом распределения глубин океана (GEBCO) в районе источника цунами [Носов, Колесов, 2009; Nosov, Kolesov, 2011]. По начальному возвышению водной поверхности в источнике цунами рассчитываются параметры очага цунами: амплитуда деформации, вытесненный объём, потенциальная энергия начального возвышения [Bolshakova, Nosov, 2011]. Необходимые для анализа определения интенсивности цунами заимствованы из исторической базы данных HTDB/WLD.

Целью данной работы является изучение связи интенсивности цунами с параметрами его очаг и выработка критериев, которые наилучшим образом могут характеризовать цунамигенность землетрясения.

Литература

1. Bolshakova A.V., Nosov M.A. Parameters of tsunami source versus earthquake magnitude // Pure and Applied Geophysics, 2011, 168, P. 2023–2031, DOI: 10.1007/s00024-011-0285-3.
2. Nosov M. A., Kolesov S. V. Optimal Initial Conditions for Simulation of Seismotectonic Tsunamis // Pure and Applied Geophysics, 2011, Vol. 168 (6–7), 1223–1237, DOI: 10.1007/s00024-010-0226-6. 5.
3. Nosov M.A., Bolshakova A.V., Kolesov S.V. Displaced water volume, potential energy of initial elevation and tsunami intensity: analysis of recent tsunami events // Pure Appl. Geophys. 2013. DOI: 10.1007/s00024-013-0730-6.
4. Okada Y. Surface deformation due to shear and tensile faults in a half-space // Bulletin of the Seismological Society of America. 1985. V. 75. N 4. P. 1135–1154.
5. Носов М.А., Колесов С.В. Метод постановки начальных условий в задаче численного моделирования цунами // Вестник Московского университета, Серия 3. Физика. Астрономия. 2009. № 2. с. 96–99.
6. Поплавский А.А., Поплавская Л. Н., Спирин А. И., Пермикин Ю. Ю., Нагорных Т. В. Совершенствование магнитудно-географического критерия цунамиопасности // Вулканология и сейсмология. 2009. № 1. С. 65–74.

ВОЗМУЩЕНИЯ ПОТОКА АТМОСФЕРЫ ПРИ ОБТЕКАНИИ РЕАЛЬНЫХ ГОР СРЕДНЕГО МАСШТАБА

в.н.с. *Кожевников В.Н.*, доц. МГТУ *Берзегова Р.Б.*,
декан МГТУ *Беданоков М.К.*

Физика явления обтекания реальных среднемасштабных гор исследуется на основе гидродинамического моделирования. Используется двумерная стационарная модель. Вязкость и силы Кориолиса не учитываются. Учитывается неограниченность атмосферы по горизонтали и вертикали. Учитывается нелинейность поля скоростей за счет рассмотрения ситуации, когда в невозмущенном натекающем потоке перед горами скорость U и вертикальный градиент температуры γ не зависят от высоты [3, 4, 6]. Рассматривается трехслойный поток атмосферы, при этом нижний слой представляет тропосферу, средний — нижнюю стратосферу, верхний — вышележащие слои атмосферы. Впервые исследуются свойства возмущений во всем диапазоне характеристик натекающего потока для конкретного реального среднемасштабного рельефа гор. Моделирование сводится к решению уравнения Гельмгольца и расчету полей траекторий и скорости. Показывается, что свойства натекающего потока при этом можно варьировать за счет масштаба Лира λ_c, введенного в [7] и определяемого через скорость U и частоту Брента–Вяйсяля N формулой

$$\lambda_c = 2\pi \frac{U}{N}.$$

Показано, что при варьировании масштаба Лира можно использовать характерные значения градиента температуры (и, значит, частоты N) и изменять только скорость U. Исследования были проведены для диапазона значений λ_c от 3 до 12.2 км (или значений U от 6 до 24.4 м/с). Для всех слоев скорость задавалась одинаковой, а градиенты γ — равными снизу вверх 6, 0 и 3 град/км. Для определения двумерных характеристик реального рельефа использовались специально созданные программы обработки карты высот района г. Новороссийска. Исследовались возмущения при обтекании четырех рельефов: среднего, частного (наиболее отличного от среднего) и двух искусственно созданных. Первые два рельефа имели по два господствующих хребта, искусственные — по одному хребту, при этом последние имели одинаковые площади сечения со средним рельефом и одинаковую с ним крутизну подветренного склона. У искусственных рельефов резко различались высоты господствующего хребта: у одного она совпадала с высотой среднего рельефа и равнялась 541 м, у другого она была существенно меньше и равнялась 350 м. На рис. 1 представлен пример одного из исследованных случаев обтекания гор (для среднего рельефа при λ_c = 5 км, или U = 10 м/с).

Основной поток направлен с лева на право. Цифрами на некоторых траекториях указаны их высоты в нарекающем потоке. В топосфере видны две роторные зоны и три области струйных течений, Особенно развита из них струя у подветренного склона гор. В области над горами некоторые траектории близки по форме к обтекаемому рельефу (например, с z_0=4.5 и 9.5). Здесь проявляют себя одновременно два масштаба — λ_c и масштаб формы гор. В подветренной области господствует только масштаб Лира.

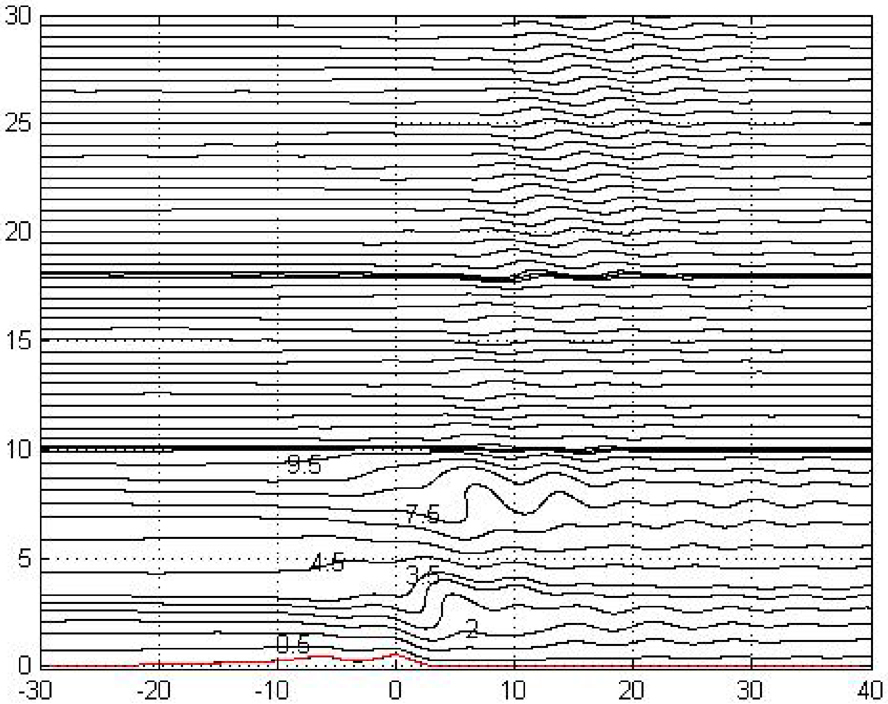


Рис. 1. Траектории движения частиц воздуха со значениями высот в натекающем потоке: z_0=0;0.5;1.3;2;2.6;3.1;3.5;4.5;5.6;6.7;7.5;8.3;8.9;9.5 км в тропосфере, выше z_0 возрастают равномерно с шагом в 0.5 км. На вертикальной шкале представлены высоты, на горизонтальной — расстояния в км.

Основными являются следующие результаты. 1. Показано, что при оценке влияния на возмущения свойств натекающего потока следует прежде всего знать характерное значение масштаба Лира в нем. При этом в расчетах данной величины необходимо в первую очередь учитывать скорость потока. 2. Подтверждено, что изменения возмущений по вертикали близки к периодическим и их период близок значению масштаба Лира, что в изменениях возмущений по горизонтали над горами существенную роль играет не только масштаб Лира, но и горизонтальный масштаб формы обтекаемых гор. В подветренной области возмущения типично имеют волновой характер с периодом близким к величине масштаба Лира. 3. Установлено, что возмущения атмосферы при обтекании гор определяются следующими факторами: упругостью натекающего потока по отношению к вертикальным смещениям частиц воздуха, его скоростью, возмущающим действием рельефа, возбуждением собственных колебательных процессов в основных слоях атмосферы. 4.Показано, что ранее установленный закон сглаживания возмущений при увеличении масштаба Лира выполняется лишь в среднем. При малых значениях этого параметра сглаживание может сменится колебаниями. 5. Показано, что в области возмущений всегда присутствуют зоны резкого сгущения траекторий. Движения частиц в них имеют характер струи. Максимальное значение скорости в струе можно использовать в качестве количественной меры интенсивности орографических возмущений.

Литература

1. Кожевников В.Н. Обзор современного состояния теории мезомасштабных орографических неоднородностей поля вертикальных токов. Тр. ЦАО, вып. 98,стр. 3–40, 1970.
2. Atkinson B.W. Meso-scale atmospheric circulations. Academic Press, London-New York-Toronto-Sidney-San Francisko. 1981.
3. Кожевников В.Н. Возмущения атмосферы при обтекании гор. Москва, "Научный Мир", 160 стр. с илл., 1999.
4. Кожевников В.Н., Беданоков М.К. Нелинейная многослойная модель обтекания неровности произвольной формы. Изв.РАН, ФАО, т. 29, No. 6, стр.780–792, 1993.
5. Long R.R. Some aspects of the flow of stratified fluids. 3. Continuous density gradients. Tellus, v. 7, No 3, 1955.
6. Кожевников В.Н., Беданоков М.К. Волновые возмущения над горами Крыма. Теория и наблюдения. Изв. РАН, ФАО, том 34, № 4, стр. 546–556, 1998.
7. Lyra G. Theorie der stationaren Leewellenstromung in freien Atmosphare. Z.angew. Math. und Mech., 23, H. 1, 1943.
8. Кожевников В.Н. Орографические возмущения в двумерной стационарной задаче. Изв. АН СССР, т. 4, No. 1, стр. 33–52, 1968.
9. Кожевников В.Н., Лосев А.С. О построении модели обтекания при точном выполнении граничного условия на цилиндрическом профиле. Вест. МГУ. Сер. 3. Физика. Астрономия. Т. 23, No. 5, стр. 43–50, 1982.

МОДЕЛИРОВАНИЕ НОВОРОССИЙСКОЙ БОРЫ

доц. МГТУ *Берзегова Р.Б.*, декан МГТУ *Беданоков М.К.*,
в.н.с. *Кожевников В.Н.*

В стране давно известно грозное атмосферное явление, получившее название Новороссийской боры. В настоящей работе проводится исследование физических характеристик этого явления на основе гидродинамического моделирования [3, 5, 6]. Используется стационарная, двумерная, средне-масштабная модель, учитывающая неограниченность атмосферы по горизонтали и вертикали. При этом используется та же трехслойная нелинейная модель, что и в предыдущей в работе [4], а так же часть полученных в ней результатов. Однако главное внимание обращено на исследование характеристик возмущений атмосферы в подветренной от гор области в нижнем километровом слое. Здесь подробно исследуются не только траектории движения частиц воздуха, но и поля возмущений скорости и температуры. Особо тщательно исследуются изменения модуля скорости в струйном течении у подветренного склона по мере удаления от гор. Опираясь на результаты предыдущих работ [3–6, 8–11], делается вывод о том, что данные расчетов скорости в этом струйном течении позволяют оценивать силу порывов ветра при боре. Расчеты проводятся для того же широкого диапазона характеристик натекающего потока, что и в [4], а именно для диапазона значений масштаба Лира λ_c от 3 до 12.2 км, или диапазона скоростей от 6 до 24.4 м/с. Расчеты проводятся так же для прежних обтекаемых рельефов: среднего, обозначаемого как sr, частного, обозначаемого как ch, искусственного высокого, обозначаемого как iskV, и искусственного низкого, обозначаемого как iskN. Средний рельеф получен путем усреднения 10 частных рельефов. У него два господствующих хребта, причем самый высокий из них является подветренным и имеет высоту 541 м. Частный рельеф соответствует сечению, наиболее отличному от характеристик среднего. Два остальных рельефа чисто теоретические и имеют по одному господствующему хребту разной высоты. У них площадь сечения и крутизна подветренного склона те же, что и у среднего рельефа. Набор различных рельефов позволяет исследовать зависимость возмущений от деталей формы. На рисунке 1 представлены полученные зависимости характерной скорости струи Vb от масштаба Лира λ_c для указанных рельефов. Главная зависимость для среднего горного рельефа местности представлена кривой, отмечаемой звездочками. Можно видеть, что скорость струи изменяется не монотонно при значениях масштаба λ_c меньших 9 км. Эти колебания, по-видимому, определяются изменениями отражения волновой энергии от поверхностей раздела между слоями атмосферы. В работе так же анализируется аналогичная зависимость отношения Vb к скорости натекающего потока, которая показывает, что закон сглаживания орографических возмущений, сформулированный в [4], выполняется только в среднем и преимущественно для больших значений масштаба Лира.

Из полученных в работе результатов основными являются следующие:

- Подтверждено, что характерная скорость потока Vb у подветренного склона является важнейшей количественной характеристикой возмущений атмосферы при обтекании гор.
- Можно полагать, что бора в полной мере проявляет свою разрушительную силу тогда, когда направление основного потока атмосферы с суши близко к направлению поперек горным хребтам.
- Следует рассматривать два варианта боры. Основным (более частым) можно считать вариант, когда значения масштаба Лира меньше 9 км. В этом случае при увеличении масштаба Лира значения Vb изменяются волновым образом в диапазоне значений 17–24 м/с. Второй вариант боры следует ожидать при больших значениях масштаба Лира, т.е. в ситуациях, когда сила ветра пе-

ред горами превышает 18 м/с. Значения Vb при увеличении масштаба Лира при этом растут примерно линейно и должны заметно превышать 24 м/с.

- Изменения температуры воздуха при боре мало зависят от эффекта обтекания и, вероятно, определяются практически тем, насколько температура приходящей массы воздуха отлична от температуры вытесняемой массы.
- Скорость порывов ветра при боре определяется энергией потока воздуха у подветренного склона гор и последующими процессами турбулизации атмосферы в приземном слое города и бухты. Эти процессы не моделировались, однако можно полагать, что при боре сила этих порывов всегда больше величины Vb — вероятно, в два и более раз.

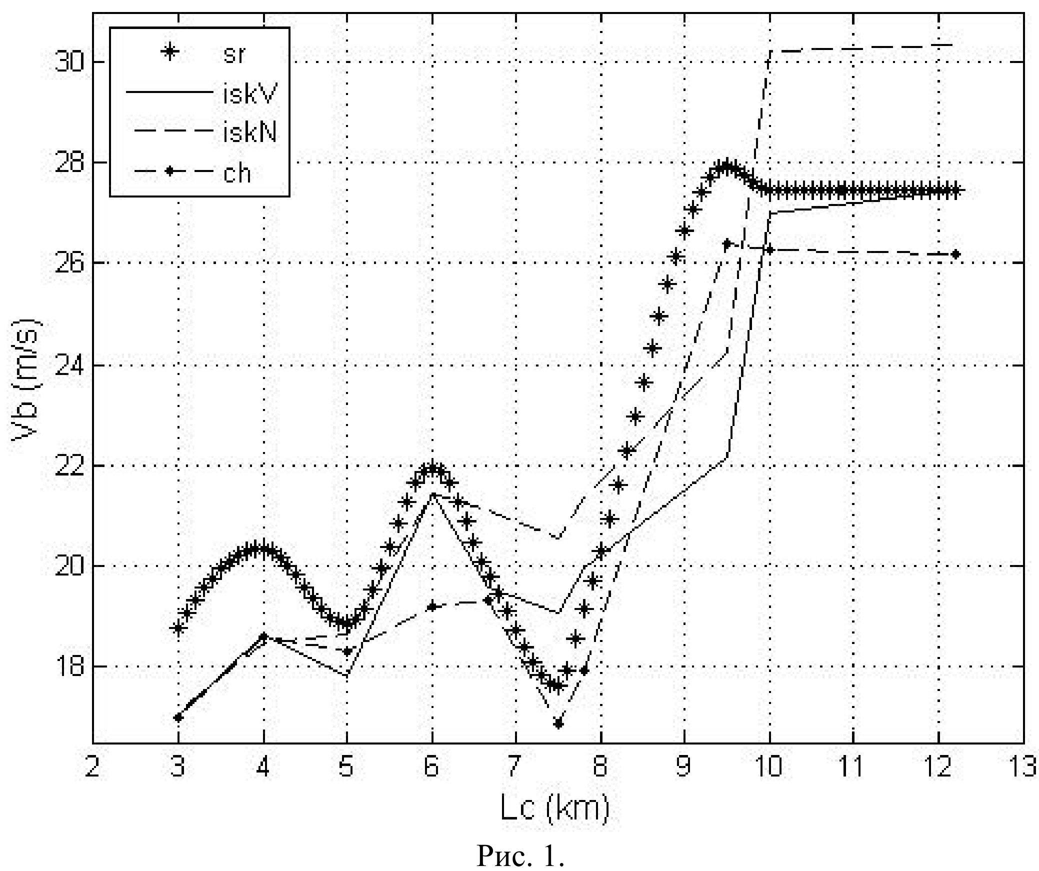


Рис. 1.

Литература

1. Кожевников В.Н. Обзор современного состояния теории мезомасштабных орогра-фических неоднородностей поля вертикальных токов. Тр.ЦАО, вып.98,стр. 3–40, 1970.
2. Atkinson B.W. Meso-scale atmospheric circulations. Academic Press, London-New York-Toronto-Sidney-San Francisko. 1981.

3. Кожевников В.Н. Возмущения атмосферы при обтекании гор. Москва, "Научный Мир", 160 стр. с илл., 1999.
4. Берзегова Р.Б., Беданоков М.К., Кожевников В.Н. Возмущения потока атмосферы при обтекании реальных гор среднего масштаба. В печати, Изв, РАН, 2017.
5. Кожевников В.Н., Беданоков М.К. Нелинейная многослойная модель обтекания неровности произвольной формы. Изв.РАН, ФАО, т. 29, No. 6, стр. 780–792, 1993.
6. Кожевников В.Н., Беданоков М.К. Волновые возмущения над горами Крыма. Теория и наблюдения. Изв. РАН, ФАО, том 34, № 4, стр. 546–556, 1998.
7. Lyra G. Theorie der stationaren Leewellenstromung in freien Atmosphare. Z. angew. Math. und Mech., 23, H. 1, 1943.
8. Кожевников В.Н., Бибикова Т.Н., Журба Е.В. Орографические возмущения атмосферы над Северным Уралом. Изв.АН СССР, ФАО, т. 8, No. 5, стр. 451–461, 1977.
9. Кожевников В.Н., Бибикова Т.Н., Журба Е.В. Орографические волны, облака и роторы с горизонтальной осью над горами Крыма. Изв.АН. СССР, ФАО, т. 22, No.7, стр. 682–690, 1986.
10. Еланский Н.Ф., Кожевников В.Н., Кузнецов Г.И., Волков Б.И. О влиянии орографических возмущений на перераспределение озона в атмосфере на примере обтекания Антарктического полуострова. Изв. РАН, ФАО, т. 39, № 1, стр. 105–120, 2003.
11. Кожевников В.Н., Еланский Н.Ф., Моисеенко К.Б. Вариации содержания озона и двуокиси азота в поле орографических волн над Приполярным Уралом. ДАН РАН, 2017, в печати.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ ГЕОСТАЦИОНАРНЫХ СПУТНИКОВ СИСТЕМ НАВИГАЦИИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ КОРРЕКЦИИ В ЗАДАЧЕ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ИОНОСФЕРЫ

Вед. инж. *Курбатов Г.А.*

Геостационарные спутники используются для исследований полного электронного содержания (total electron content - TEC) ионосферы довольно давно. До недавнего времени эти исследования в большинстве своем основывались на методе фарадеевского вращения плоскости поляризации линейно поляризованной радиоволны при прохождении через ионосферу Земли. Данным методом в разное время исследовались ионосферные эффекты солнечных вспышек [1, 2], статистические характеристики перемещающихся ионосферных возмущений [3], акустико-гравитационные волны [4], и т.д. Недостатком данного метода является необходимость в дополнительной информации о магнитном поле Земли вдоль луча “геостационарный спутник — наземная приемная станция”.

Другим методом, широко применяем в настоящее время для определения TEC, является использование когерентных двухчастотных радиосигналов глобальных навигационных спутниковых систем (GNSS). Линейная комбинация фазовых измерений на двух рабочих частотах позволяет определить TEC с точностью до некоторой аддитивной постоянной, не требуя никакой дополнительной информации [5]. Однако, при использовании данных GNSS всегда следует учитывать движение спутников, а следовательно и подионосферных точек, в то время как при геостационарных наблюдениях подионосферные точки практически неподвижны.

Таблица 1. Двухчастотные спутники систем навигации и дифференциальной коррекции

System	Common Name	Long, deg.	PRN
WAAS	Intelsat Galaxy 15 (CRW)	133W	135
WAAS	TeleSat Anik F1R (CRE)	107.3W	138
WAAS	Inmarsat 4-F3 (AMR)	98W	133
EGNOS	SES-5 (Sirius-5)	5E	136
GAGAN	GSAT-8	55E	127
GAGAN	GSAT-10	83E	128
Beidou GEO	Compass-G1	140E	C01
Beidou GEO	Compass-G3	110.5E	C03
Beidou GEO	Compass-G4	160E	C04
Beidou GEO	Compass-G5	58.75E	C05
Beidou GEO	Compass-G6	80E	C02

Совместить достоинства обоих подходов можно при использовании сигналов геостационарных спутников систем дифференциальной коррекции SBAS (американская система WAAS, европейская EGNOS, индийская GAGAN), а также геостационарных спутников китайской навигационной системы Beidou [6, 7]. В настоящее время на орбите находятся 11 геостационарных спутников систем навигации и дифференциальной коррекции передающих на двух когерентных рабочих частотах L диапазона, данные о них приведены в табл. 1. При этом сигналы 5ти из этих спутников можно принимать на европейской части территории России.

В связи с этим исследование сигналов данных спутников и возможности их использования для мониторинга состояния ионосферы представляется весьма актуальной задачей. Продемонстрируем особенности оценки TEC по данным геостационарных спутников систем дифференциальной коррекции на примере индийской системы GAGAN. Данные для этого исследования получены на приемных пунктах MSU, расположенном на Физическом факультете МГУ, и ORDA, расположенном в Институте солнечно-земной физики (ИСЗФ СО РАН) в г. Иркутске.

На рис. 1 представлена геометрия наблюдения спутников данной системы GSAT-8 и GSAT-10 на приемных пунктах в Москве (слева) и в Иркутске (справа), показаны направления на спутники, а также положение подионосферных точек. Отметим, что лучи спутник-приемник для данных приемных пунктов проходят через совершенно разные области ионосферы. На рис. 2 представлены оценки шумов TEC (СКО за 100 сек.) по данным приема сигналов спутников GAGAN на приемных пунктах в Москве и Иркутске соответственно. Отметим ряд моментов. Во первых, средний уровень шума ~0.6 TECU и максимальные значения до ~1.5TECU на порядок превышают аналогичные значения для GPS/ГЛОНАСС наблюдений при сопоставимых углах возвышения спутников. Отчасти это можно объяснить большей высотой орбиты геостационарных спутников по сравнению с GPS/ГЛОНАСС и меньшей мощностью передатчиков GAGAN. Кроме того, отметим существенную внутрисуточную изменчивость уровня шумов TEC для каждого из спутников GAGAN, а также тот факт, что картина шумов идентична на обоих приемных пунктах (MSU и ORDA), отстоящих друг от друга на 5 часовых поясов. Это свидетельствует о том, что наблюдаемая картина шумов не связана с ионосферными эффектами, а полностью обусловлена самими спутниками. Во многом это может быть вызвано тем фактом, что спутники GAGAN не используют атомный эталон времени, в отличие от спутников GPS/ГЛОНАСС. Тем не менее, тот факт что наблюдаемые шумы в основном определяются аппаратурой спутника и не зависят от состояния ионосферы и приемной станции, позволяют использовать методы фильтрации для их подавления, что позволяет использовать данные измерения для мониторинга состояния ионосферы в случаях, когда не предъявляется серьезных требований к точностям оценки TEC.

Как видно из приведенного выше примера, вопрос сравнения уровня шумов в оценках TEC по данным геостационарных спутников различных систем приобретает особое значение. Проведем подобное сопоставление на основе данных приемного пункта MSU. Пункт MSU имеет возможность принимать сигналы пяти интересующих нас геостационарных спутников: SES-5 (prn136), GSAT-8 (prn127), GSAT-10 (prn128), Compass-G6 (BDS2) и Compass-G5 (BDS5); частота сбора данных составляет 1Гц. Для анализа был выбран день 12 мая 2015 г, характеризующийся невозмущенными геомагнитными условиями: Kp~2..3, Dst ~ –4.. –44. На рис. 3 (слева, сверху) приведена геометрия эксперимента, слева снизу приведены оценки TEC для рассматриваемого тестового дня по данным спутников BDS5 и GSAT-8 (верхняя панель) и BDS2 и GSAT-10 (нижняя панель). Отметим, что направления на эти пары спутников очень близки, а, следовательно, близки и подионосферные точки. Таким образом, вариации TEC по данным этих спутников в значительной степени повторяют друг друга.

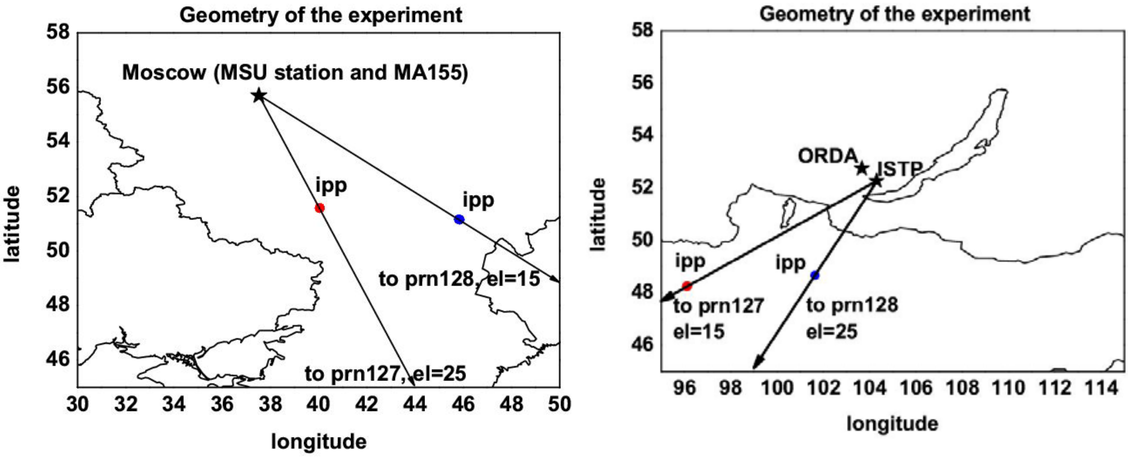


Рис. 1. Геометрия наблюдения спутников GAGAN на приемных пунктах в Москве (слева) и Иркутске (справа).

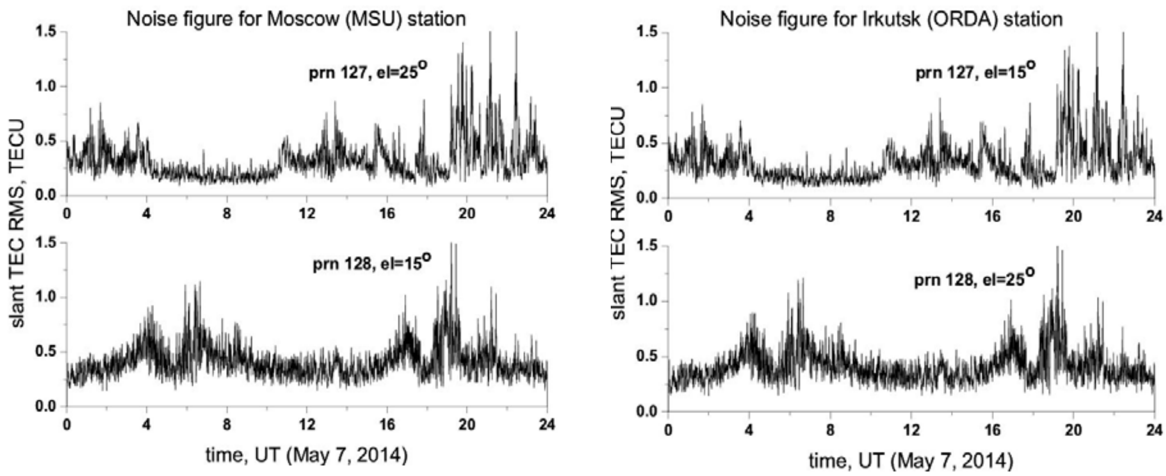


Рис. 2. Оценка уровня шумов в TEC по данным наблюдения спутников GAGAN на приемных пунктах в Москве (слева) и Иркутске (справа).

На рис. 3 (справа, внизу) приведены оценки шумов (100 сек. СКО) в записях TEC по данным приема сигналов этих спутников. Хорошо видно, что шумы для спутников GAGAN в среднем составляют 0.6 TECU, достигая значений 1.5 TECU, в то время, как шумы для спутников COMPASS/Beidou для тех же углов возвышения существенно меньше, достигая в максимуме значений ~0.2 TECU, что лишь немногим больше характерного уровня шумов для спутников GPS/ГЛОНАСС на сравнимых углах возвышения. На рис. 3 (справа, сверху) приведены вариации TEC и оценки шумов (100 сек. СКО) для приемного пункта MSU и спутника SES-5 системы EGNOS. Хорошо видно, что уровень шумов в записях TEC для спутника SES-5 достигает 15 TECU, что делает эти данные абсолютно непригодными для ионосферных исследований. Таким образом, видно, что наблюдения TEC по данным геостационарных спутников системы

COMPASS/Beidou обладают наилучшими шумовыми характеристиками из всех геостационарных систем. В таблице 2 сведены характерные шумы для различных систем.

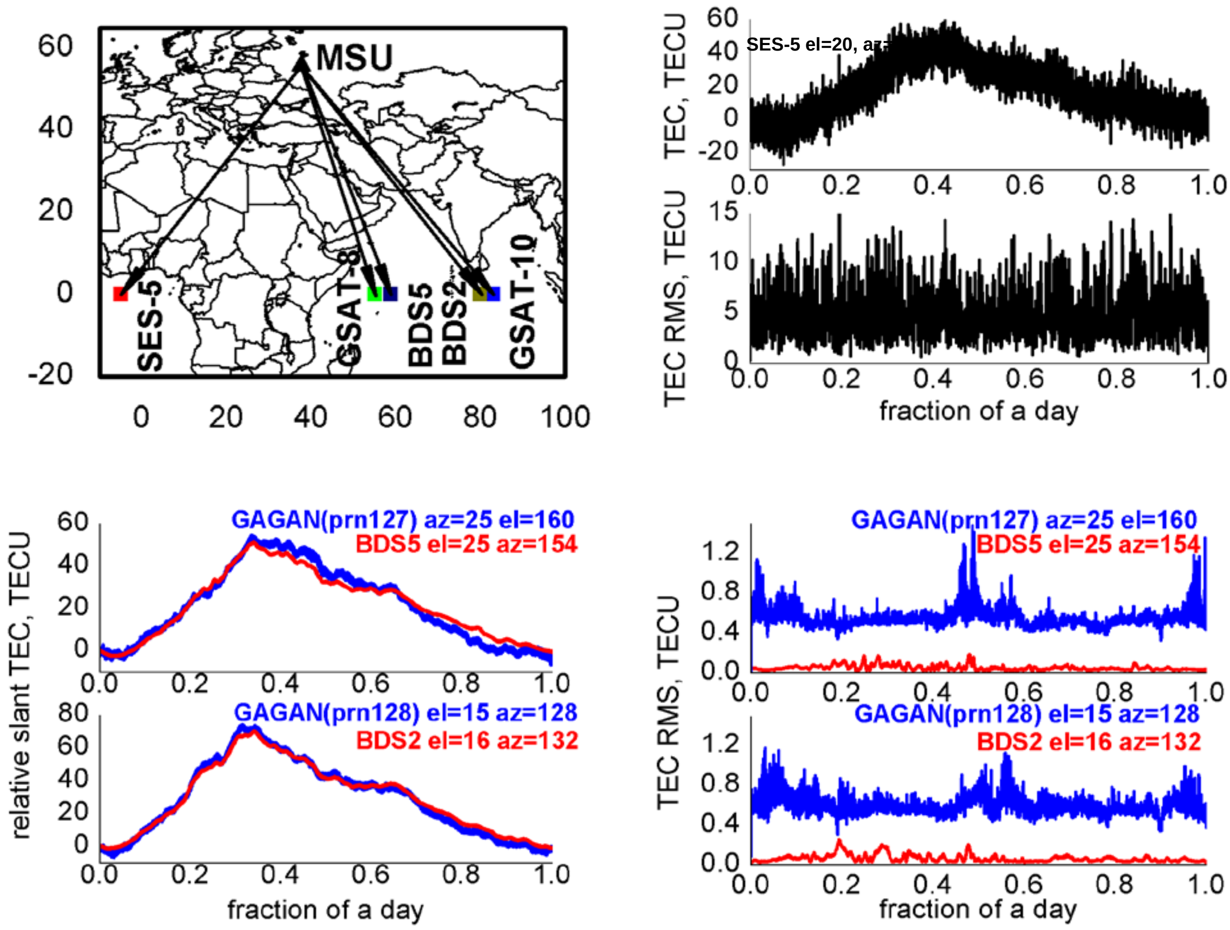


Рис. 3. Сопоставление уровня шумов TEC по данным различных геостационарных спутников для приемного пункта MSU.

В заключение продемонстрируем возможности использования геостационарных измерений TEC по данным COMPASS/Beidou и GAGAN для анализа ионосферных эффектов на примере двух геомагнитных бурь - очень сильной (G4) геомагнитной бури дня св. Патрика 2015 г. и умеренной (G2) бури начала июня 2013 г. На рис. 4 (слева) совместно с Dst индексом представлен суточный ход TEC для станций TASH (район г. Ташкент) и ORDA (район г. Иркутск) по данным спутника GSAT-10. Видна интенсивная положительная ионосферная буря во время которой значения TEC превышали свои невозмущенные значения (красная кривая) на 20-30TECU. На рис. 4 (справа) совместно с Dst индексом представлен суточный ход TEC во время бури дня св. Патрика 2015 г. для трех станций - JFNG (материковый Китай), SIN1 (Сингапур), CUT0 (Австралия) и геостационарного спутника Compass-G3.

Таблица 2. Сопоставление уровня шумов TEC для различных геостационарных спутников.

Satellite, Elevation angle	TEC RMS100,TECU	
	Mean	Max
EGNOS SES-5 (prn136), el=20°	4.96	16.08
GAGAN GSAT-8 (prn127), el=25°	0.56	1.48
GAGAN GSAT-10 (prn128), el=15°	0.61	1.18
Compass-G5 (BDS5), el=25°	0.053	0.188
Compass-G6 (BDS2), el=16°	0.066	0.257
GPS/GLONASS, el =5-15°	0.05	0.1

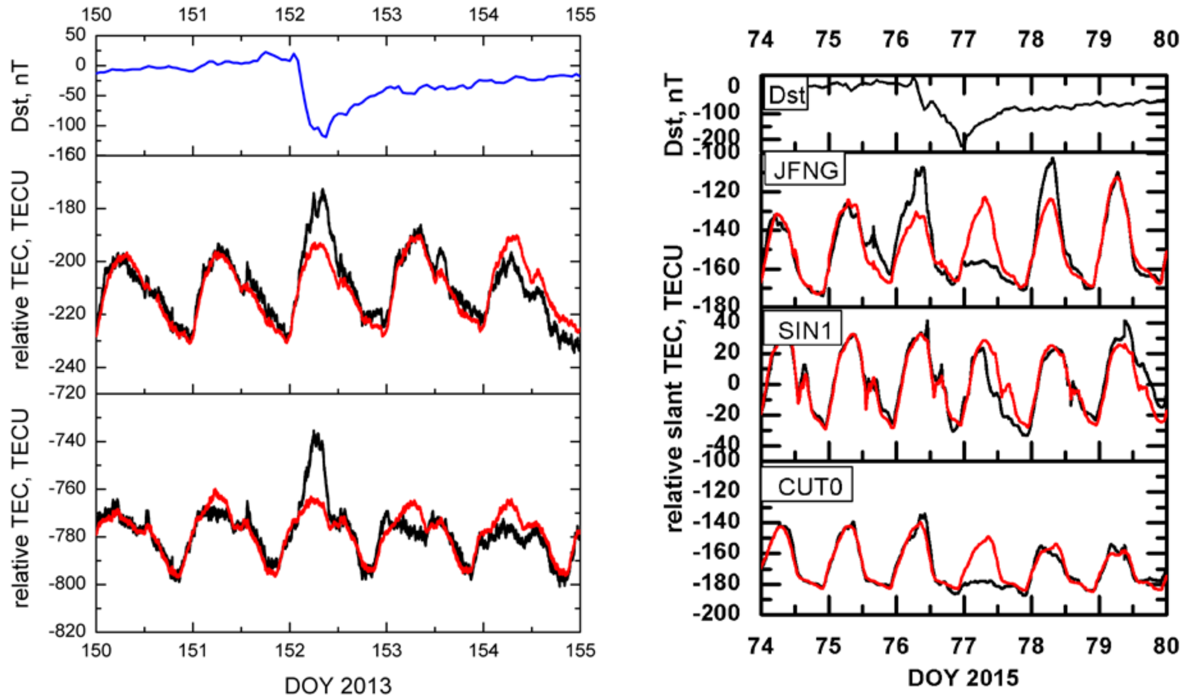


Рис. 4. Примеры использования вариаций TEC по данным геостационарных спутников для исследования ионосферных эффектов геомагнитных бурь.

Для среднеширотной станции северного полушария JFNG мы наблюдаем интенсивную положительную ионосферную бурю с превышением невозмущенных значений TEC на ~25TECU в 76-й день с последующим подавлением суточного хода TEC (отрицательная буря) в 77-й день (фаза восстановления геомагнитной бури). Однако далее на станции JFNG в 78й день опять наблюдается положительная ионосферная буря. На приэкваториальной станции SIN1 и среднеширотной станции южного полушария CUT0 положительная ионосферная буря в 76-й день выражена не так явно, в тоже время также наблюдается эффект подавления суточного хода TEC в

77-й день. Отметим, что эффект подавления суточного хода TEC уменьшается с приближением к геомагнитному экватору.

Таким образом, мы наблюдаем асимметрию в ионосферном отклике на геомагнитную бурю в северном и южном полушариях, вызванную сложной комбинацией процессов (меридиональные ветры, изменение состава нейтральной компоненты, проникновение магнитосферного электрического поля), ответственных за возникновение положительных и отрицательных ионосферных возмущений.

Приведенные результаты показывают возможность использования двухчастотных когерентных сигналов геостационарных спутников для непрерывного мониторинга TEC в ионосфере в спокойных и возмущенных гелиогеофизических условиях. Основным преимуществом геостационарных измерений является практически неподвижность подионосферной точки, что позволяет анализировать длительные записи TEC в отличие от коротких 2–6 часовых записей, как в случае с GPS/ГЛОНАСС. Вместе с тем при анализе геостационарных измерений TEC необходимо учитывать больший по сравнению с GPS/ГЛОНАСС уровень шума в данных. Проведенные исследования показали, что предпочтительно использовать геостационарные спутники системы COMPASS/Beidou, шумы в оценках TEC для которых достигают в максимуме значений 0.2TECU, что сопоставимо с шумами в оценках TEC по данным GPS/ГЛОНАСС на сравнимых углах возвышения. Оценки TEC по данным спутников GAGAN существенно более зашумлены (СКО TEC в среднем ~0.7TECU) и для использования этих данных необходимо предусмотреть процедуры сглаживания полученных записей геостационарного TEC. Использование спутников системы EGNOS для оценки TEC в настоящее время не представляется целесообразным из-за высокого уровня шума (~10TECU) в данных. Растущее число приемников сигналов, а также двухчастотных геостационарных спутников в созвездиях навигационных систем дает возможность в будущем включить данный тип данных в процедуры ионосферной радиотомографии и интерферометрии, при условии уменьшения уровня шумов в данных геостационарного TEC.

Литература

1. Mendillo M., Klobuchar J.A., Fritz R.B., da Rosa A.V., Kersley L., Yeh K.C., Flaherty B.J., Rangaswamy S., Schmid P.E., Evans J.V., Schnoedel J.P., Matsoukas D.A., Koster J.R., Webster A.R., Chin P. Behavior of the ionospheric F region during the Great Solar Flare of August 7, 1972. // Journal of Geophysical Research. 1974. V. 79, N 4. P. 665–672.
2. Davies K. Recent progress in satellite radio beacon studies with particular emphasis on the ATS-6 radio beacon experiment // Space Science Review. 1980. V. 25, N 4. P. 357–430.

3. Katamzi Z.T., Smith N.D., Mitchell C.N., Spalla P., Materassi M. Statistical analysis of travelling ionospheric disturbances using TEC observations from geostationary satellites // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. 2011. V. 74. P. 64–80.
4. Dieminger W., Schodel J., Schmidt G., Hartmann G. Recording gravity waves by means of geostationary beacon-satellites // Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics. 1970. V 32, N 9. P.
5. Hofmann-Wellenhof B., Lichtenegger H., Collins J. Global Positioning System: Theory and Practice. New York. Springer–Verlag Wien.1992. 327 p.
6. Kunitsyn V.E., Kurbatov G.A., Yasyukevich Yu.V. and Padokhin A.M. Investigation of SBAS L1/L5 signals and their application to the ionospheric TEC studies // IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters (2015) Vol. 12, № 3, pp. 547–551.
7. V. E. Kunitsyn, A. M. Padokhin, G. A. Kurbatov, Y. V. Yasyukevich, and Y. V. Morozov. Ionospheric TEC estimation with the signals of various geostationary navigational satellites. GPS Solutions, 20(4):877–884, 2016.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ФИЛЬТРАЦИОННОГО ТЕЧЕНИЯ В НЕФТЯНЫХ ПЛАСТАХ

Доц. *Исаева А.В.*, ст. преп. *Доброжанский В.А.* (МФТИ)

Истощение активных запасов нефти делает актуальной задачу создания эффективных способов разработки трудноизвлекаемых и нетрадиционных запасов углеводородного сырья. В России актуальность этой проблемы обусловлена в первую очередь падением с 2007 г. добычи в ключевом нефтедобывающем регионе ХМАО-Югре (за последние 10 лет добыча снизилась на 14%). В то же время увеличение добычи нефти в этом регионе представляется достижимым за счет:

- адресной реализации методов увеличения нефтеотдачи (химических, тепловых, газовых и др.) на истощенных месторождениях;
- создания и внедрения способов разработки трудноизвлекаемых и нетрадиционных запасов углеводородного сырья (в первую очередь — баженовской свиты [1]).

При этом до реализации дорогостоящих промысловых экспериментов по тестированию новых способов разработки месторождений целесообразно сначала проводить компьютерное моделирование, позволяющее априори оценить эффективность предлагаемых технологий. Такой подход в настоящее время получил признание в нефтедобывающей отрасли во всем мире [2]. Традиционно подобное моделирование реализуют с использованием специализированных программных комплексов — гидродинамических симуляторов. Наиболее распространенные в отрасли симуляторы нацелены главным образом на адекватное моделирование физических процессов, происходящих в нефтяных пластах при закачке в них воды. Закачку воды в нефтяные пласты с целью поддержания пластового давления применяют на большинстве месторождений во всем мире, что обуславливает специфику отраслевых симуляторов. В то же время подобная специфика создает трудности при попытках расчета с помощью таких программных продуктов нестандартных процессов (закачка кислородосодержащих смесей, термодеструкция керогена и т.д.). В частности, набор варьируемых параметров модели ограничен и не позволяет полноценно оценить устойчивость результатов расчета к изменениям параметров модели. Такая задача актуальна при изучении новых способов разработки нефтяных месторождений, для которых еще не накоплен достаточный промысловый опыт.

В 2015–2016 гг. на кафедре физики Земли физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова была проведена работа по созданию прототипа гидродинамического симулятора [3]. Для программной реализации была выбрана модель, описывающая трехфазное неизотермическое течение в поровом пространстве породы-коллектора. Выбор такой модели как базовой обусловлен тем, что в настоящее время наибольший практический интерес представляет моделирование технологий повышения нефтеотдачи, основанных на закачке кислородосодержащих смесей (в простейшем случае — воздуха) и предполагающих формирование внутри пласта подвижной зоны экзотермических окислительных реакций [1], [4]. Неизотермический характер фильтрационного течения принципиален в рассматриваемом случае, что учитывалось в модели.

Математическая модель неизотермического трехфазного течения представляет собой начально-краевую задачу для системы дифференциальных уравнений в частных производных. Входящие в систему уравнения выражают закон сохранения массы для каждой из фильтрующихся фаз (уравнения неразрывности фаз) и закон сохранения объемной плотности энергии насыщенного флюидами (нефть, газ, вода) пласта. Также в систему входят обобщенный закон Дарси для движущихся фаз и соотношения, характеризующие физические свойства фаз (уравнения состояния фаз, зависимости вязкостей фаз от температуры и давления и т.д.).

В общем случае получившуюся начально-краевую задачу решают с применением численных методов [2]. При разработке прототипа программного комплекса был использован метод конечных (контрольных) объемов (finite volume method) в простейшем для реализации варианте. Выбранный подход к дискретизации уравнений может позволить в дальнейшем использовать преимущества GPU для ускорения расчетов при развитии программного комплекса.

Созданный программный комплекс состоит из трех модулей:

- модуль считывания и визуализации входной информации для моделирования (геометрия и физические параметры залежи) – в качестве формата файла входной информации использован наиболее распространенный формат файлов коммерческого симулятора Eclipse компании Schlumberger;

- модуля выполнения расчетов — основного модуля, посредством которого строятся численные решения начально-краевой задачи неизотермического трехфазного фильтрационного течения;
- модуля визуализации, анализа и обработки результатов расчетов.

Разработанный программный комплекс можно рассматривать как прототип / задел, на базе которого может быть решен ряд как исследовательских (устойчивость результатов расчета к изменениям параметров модели для процессов, подразумевающих закачку кислородосодержащих смесей в пласт), так и практических задач (оценка эффективности реализации технологий повышения нефтеотдачи на конкретных месторождениях).

Литература

1. Алекперов В.Ю., Грайфер В.И., Николаев Н.М. и др. Новый отечественный способ разработки месторождений баженовской свиты: часть 1 // Нефтяное хозяйство. 2013. № 12. С. 100–105.
2. M. Islam, S. Moussavizadegan, S. Mustafiz, J. Abou-Kassem. Advanced Petroleum Reservoir Simulation. Salem: Wiley, 2010.
3. Разработка программного комплекса расчета технологических показателей разработки нефтяных месторождений с применением методов увеличения нефтеотдачи для проектирования оптимальных технико-технологических решений: отчет о НИР (заключ.): 41/15 / МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет; рук. Исаева А.В.; исполн.: Доброжанский В.А. [и др.]. М., 2016. 153 с.
4. H. Jia, J. Sheng. Discussion of the feasibility of air injection for enhanced oil recovery in shale oil reservoirs // Petroleum. 2017. http://dx.doi.org/10.1016/j.petlm.2016.12.003.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА УРОВНЕЙ РЕГИОНАЛЬНЫХ ДИАГНОСТИЧЕСКИХ СБОЕВ ПОЛНОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ПО ДАННЫМ GPS НАБЛЮДЕНИЙ

Доц. *Захаров В.И.*, с.н.с. *Ясюкевич Ю.А.* (ИСЗФ СО РАН),
асп. *Пронин В.Е.*

Общепризнанным является влияние космической погоды на магнитосферу и ионосферу Земли. В определенных случаях это ведет к невозможности измерить радионавигационные параметры сигнала конкретного спутника или определить используемую в качестве диагностического параметра полного электронного содержания (ПЭС) или ее производную.

В этой связи нуждается в уточнении подход, по которому число пропусков и величина скачков ПЭС характеризуют общее число сбоев этого параметра. В качестве уровня сбоев задают некую величину, которую считают «нефизичной», например, для скорости изменения ПЭС [1]. Иначе говоря, под сбоем понимается такая скорость изменения ПЭС, выше которого изучаемый параметр «просто не может быть». Однако известно, что вариации ПЭС связаны с региональными особенностями ионосферы [1, см. там же библиографию] в различных гео- и гелиофизических условиях.

Цель данной работы — разработка и практическое использование статистического критерия для оптимального использования наблюдаемых сигналов. Иначе говоря, нужно перестать приписывать явления сбоя редким событиям, на которые реагирует ионосферы Земли. Мы провели непрерывный анализ принимаемых спутниковых сигналов для 3 широтных областей, что дает возможность исследовать широтную зависимость изучаемого параметра для двух фаз солнечного цикла — роста и максимума активности, а объем используемой статистики позволил получить значимые оценки.

Методика статистического определения величины уровня скачков ПЭС

Для определения отклика ионосферы на различные геофизические события обычно используется метод измерения полного электронного содержания I ПЭС на основе двухчастотных фазовых измерений сигнала GPS [1]. Анализ показывает, что процесс формирования сбоя изучаемого параметра I представляет собой результат суммы собственно сбоев, определяемых инструментальными особенностями регистрации фаз L1 и L2 и изучаемыми процессами в среде. Отметим, что в большом числе приложений вместо самого значения I используется его производная по времени dI/dt.

Суть предлагаемой нами процедуры сводится к следующему. В выбранном широтно-долготном регионе строится распределение изучаемого параметра для большого интервала времени. Базовыми статистиками служат распределения параметра dI/dt в выбранном регионе, например, за 1 день. Затем проверяется гипотеза о принадлежности полученного распределения к нормальному закону. В случае «нормальности» определяется величина уровня значимости, для которой удельный вес «хвоста» распределения меньше заданного уровня, т.е. определяет уровень сбоя в статистическом смысле. Аналогичные действия могут быть проделаны для средних по месяцам распределений в течение нескольких лет, соответствующих различным уровням солнечной активности. Более подробно методика описана в [2].

Анализируемые данные

В работе использованы данные наблюдений фаз сигналов обеих рабочих частот L1, L2, проведенных на более чем 400 выбранных станциях сети IGS. Группа 1 станций состоит из 180 станций, расположенных севернее 550 N. Для анализа среднеширотных данных мы использовали выборку из 120 станций, лежащих на территории США в «квадрате» с вершинами углов (300 N, 1250 W) и (500 N, ~1100 W) соответственно. Для экваториальной сети выбрана область от (500 N, 300 E) до (300 S, 1800 E), в которой расположено не менее 100 станций. В работе для краткости группа 1 названа группой станций «Север», группа среднеширотных станций получила название «Центр», а группа станций Юго-восточной Азии и Японии — «Юг».

Годы наблюдений относятся к разным уровням солнечной активности. Так, на 2010 приходится начало нетипичного 24 солнечного цикла, а на 2014 — его условный максимум. Для всех станций сети IGS, попавших в каждый регион, проводилось непрерывное изучение вариаций скорости изменения ПЭС, отнесенные на местную вертикаль, по всем наблюдаемым на станции навигационным ИСЗ в период 2010 и 2014 г.г. Статистика наблюдений составила более 1,6 млн часов наблюдений для группы станций Север, более 940 тыс. час для группы станций Центр и свыше 760 тыс час — для станций группы Юг, что дает ежегодные объемы статистики по каждому из регионов порядка 10^9 отсчетов.

Основные результаты

В работе проведен экспериментальный анализ статистики величин скачков ПЭС, наблюдаемых в описанных выше регионах. Показано, что с высокой степенью вероятности распределения скорости изменения TEC по времени являются нормальными. В качестве оптимальной величины статистического параметра для дальнейшего оценивания обоснован выбор уровня, соответствующего интервалу 2σ. Получено, что для различных широтных зон существуют разные уровни «сбойных» флуктуаций, который варьируется в течение года и превышает выбранный уровень значимости в 2σ. Уровень оказывается максимальным для фазы максимума солнечной активности. Для Арктического региона в этот период величина уровеня сбоя может быть выбрана как превышение *dTECU/dt* значения 5...6 *TECu*/мин, для средних широт он составляет более 2..2.5 и для экваториальных широт его значение оценивается не менее 3 *TECu*/мин. Для начала 24 солнечного цикла (2010) соответствующие значения порогов составляют величины порядка 5, 1..1.5 и 2 *TECu*/мин соответственно (для угла возвышения 10^0).

Полученные нами результаты позволяют определить численную величину порога, с которого измеряемые величины могут считаться статистическим сбоем. Отметим, что эта величина зависит от широты региона наблюдения, т.е. от региональных свойств ионосферы. Рост угла визирования в диапазоне углов 10–20 град приводит к обратно пропорциональному величине угла уменьшению числа статистичесих сбоев в определении скорости изменения ПЭС. Предложенный подход позволяет корректно определять уровень сбоя, поскольку не относит именно к сбоям определяемую с использованием навигационных сигналов GPS/GLONASS и изучаемую разными методами собственно реакцию ионосферы на различные гео-, гелиофизические условия, например, магнитные бури, солнечные вспышки и т.п.

Литература

1. Zakharov V. I., Yasyukevich Yu. V., and Titova M. A. Effect of Magnetic Storms and Substorms on GPS Slips at High Latitudes // Cosmic Research, 2016, Vol. 54, No. 1, pp. 23–33. DOI: 10.1134/S0010952516010147.
2. Захаров В.И., Ясюкевич Ю.В., Пронин В.Е. Статистический критерий для определения уровня сбоев полной электронной концентрации по данным GPS наблюдений // Ученые записки физического факультета МГУ, 2017, № 1, с. 171901-1–171901-9.
3. Захаров В.И., Ясюкевич Ю.В., Носикова Н.С. Определение уровня сбоев полной электронной концентрации по данным GPS наблюдений в различных широтных регионах //Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия, издательство Изд-во Моск. ун-та (М.), 2017. № 2, с. 1–8.

ГЕНЕРАЦИЯ СВОБОДНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В ОКЕАНЕ ПАКЕТОМ ПОВЕРХНОСТНЫХ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН

М.н.с. *Колесов С.В.*, асп. *Семенцов К.А.*, проф. *Носов М.А.*, студ. *Карпов В.А.*, исследователь *Матсумото Х.*, проф. *Канеда Й.*

Ключевые слова: цунами, свободные гравитационные волны в океане, поверхностные сейсмические волны, численное моделирование, линейная потенциальная теория

Во время катастрофического землетрясения и цунами Тохоку 11.03.2011 глубоководными станциями DONET были зарегистрированы свободные гравитационные волны с амплитудой 1–2 см и периодом порядка 50–150 с, наблюдавшиеся вскоре после прохождения поверхностных сейсмических волн через область постановки станций [1]. В связи с тем, что эти свободные гравитационные волны наблюдались более чем за час до прихода лидирующей волны цунами, мы называем их предшественниками цунами.

В работе [1] мы высказали предположение, что физический механизм генерации этих волн существенно динамический. Иными словами их амплитуда определяется не остаточными смещениями дна *послепрохождения* поверхностной сейсмической волны, а амплитудой колебаний дна непосредственно *во время прохождения* сейсмической волны. Кроме того, в работе [1] мы привели теоретические оценки, показывающие, что возникновение этих волн связано с колебаниями подводных склонов, находящихся вблизи области постановки станций DONET, причем горизонтальные колебания подводных склонов (связанные как с прохождением волн Рэлея, так и с прохождением волн Лява) играют весьма существенную роль.

Для проверки высказанных предположений было выполнено численное моделирование процесса генерации свободных гравитационных волн в океане пробегающими по дну поверхностными сейсмическими волнами.

Моделирование выполнялось при помощи комбинированной 3D/2Dмодели состоящей из двух динамически сопряженных блоков: глубоководного и мелководного [2]. Глубоководный блок основан на 3Dуравнениях линейной потенциальной теории, мелководный блок основан на 2Dуравнениях мелкой воды. В качестве входных данных для моделирования использовалась динамика движений дна, восстановленная на основе записей донных сейсмометров станций DONETв рамках приближения плоской волны. Отметим, что в отличие от выполненного ранее моделирования предшественников цунами в заливе Сагами [3], в данном случае была возможность сопоставить результаты моделирования с записями донных датчиков давления станций DONET. Было обнаружено хорошее согласие между результатами моделирования и данными наблюдений как по амплитуде, так и по времени прихода для первых 2–3 свободных гравитационных волн.

Был проведен ряд численных экспериментов, направленных на сравнение эффективности статического и динамического механизмов генерации свободных гравитационных волн, а также на выявление роли вертикальных и горизонтальных компонент движений дна в их генерации.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 16-55-50018, 16-35-00232).

Литература

1. *Носов М.А.*, *Семенцов К.А.*, *Колесов С.В.*, *Матсумото Х.*, *Левин Б.В.*Регистрация гравитационных волн, образованных в океане поверхностными сейсмическими волнами при землетрясении 11 марта 2011 г. у побережья Японии // Доклады Академии наук, издательство Наука (М.), том 461, № 5, с. 593–598.
2. *Колесов С.В., Носов М.А.* Трехмерная численная модель волн цунами. Учен.зап. физ. фак-та Моск. ун-та. — 2016. — № 3. — С. 163904–163904. (http://uzmu.phys.msu.ru/).
3. *Семенцов К.А., Носов М.А., Колесов С.В., Ву Ю*. Численное моделирование гравитационных волн, возбуждаемых в океане низкочастотными поверхностными сейсмическими волнами, на основе записей GPS-станций // Вестник Московского Университета, серия «Физика. Астрономия», 2017 (принята к печати).

МОДЕЛЬ МОРСКОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ INMOM. ИССЛЕДОВАНИЕ КЛИМАТА И РЕШЕНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ.

г.н.с. *Дианский Н.А.*

Представлены результаты воспроизведения глобальной циркуляции океана и ее межгодовой изменчивости за период 1948–2007 гг. с помощью сигма-модели общей циркуляции океана ИВМ РАН – INMOM (Institute of Numerical Mathematics Ocean Model), основанной на полных уравнениях морской гидротермодинамики. Следует отметить, что эта модель используется в качестве океанического блока в модели Земной системы ИВМ РАН, единственной от России участвующей в экспериментах для моделей этого класса по программе IPCC — Coupled Model Intercomparison Project (CMIP) Phase 4 и 5 (IPCC 2007; IPCC 2013; 2013; Володин и др., 2010; 2013). Численные эксперименты были проведены по сценарию Coordinated Ocean-ice Reference Experiment (CORE) для участия в этой международной программе по сравнению моделей общей циркуляции океана (Danabasoglu et al., 2014, 2016). Для задания реалистичного атмосферного воздействия использовались специализированные данные CORE. Показано существенное уменьшение к 2007 г. площади морского льда в Северном Ледовитом океане, соответствующее данным наблюдений. Выявлена междекадная климатическая изменчивость с заметным падением с конца 1990-х гг. интенсивности Атлантической термохалинной циркуляции (АТХЦ) и меридионального переноса тепла (МПТ) в Северной Атлантике (СА). Эволюция МПТ свидетельствует об уменьшение поступления тепла из СА в атмосферу начиная с середины 1990-х гг. Таким образом, обнаружена отрицательная обратная связь в климатической системе Земли, направленная на уменьшение потепления климата, вызванного в последние десятилетия, в основном, антропогенным фактором. Выявлена также долгопериодная — около 60 лет — изменчивость АТХЦ, которая с задержкой около 10 лет влияет на термическое состояние поверхности СА. Обосновывается предположение, что этот механизм может определять формирование собственной долгопериодной изменчивости АТХЦ.

В ФГБУ «Государственный океанографический институт имени Н.Н.Зубова» (ГОИН) как учреждения Росгидромета внедрена модель INMOM для расчета циркуляции западных морей Российской Арктики (Баренцева, Карского и Печорского морей), работающая в составе комплексной системы оперативного диагноза и прогноза гидрометеорологических характеристик (Дианский и др., 2015). С ее помощью выполнены ретроспективные расчеты термогидродинамических характеристик для этих акваторий за безледный период с 2003 по 2012 г. и обнаружены важные особенности циркуляции вод Баренцева, Карского и Печорского морей. Выявлена структура водообмена между Карским и Печорским морями через пролив Карские ворота.

Подобная же система оперативного расчета морской циркуляции разрабатывается в ГОИНе и для Черного и Азовского морей (Дианский, Фомин, 2017). С помощью варианта этой системы, приспособленного для ретроспективных расчетов, осуществлялись расчеты режимных характеристик гидрометеоусловий для обеспечения проектирования строительства Керченского мостового перехода. С целью изучения особенностей формирования и выявления требований к точности воспроизведения атмосферной и морской циркуляции в акватории Азовского моря было проведено воспроизведение воспроизведении самых экстремальных за весь период инструментальных наблюдений таганрогских нагонов, произошедших

24.03.2013 и 24.09.2014. Для этого на основе модели морской циркуляции INMOM, были реализованы версии модели Азовского моря с пространственным разрешением 4 км, 1 км и 250 м. Для задания реалистического атмосферного форсинга над Азовским морем использовались два типа данных: реанализ ERA-Interim с пространственным разрешением 0.75° и результаты расчетов по региональной модели атмосферной циркуляции WRF (Weather Reasearch and Forecast Model) с пространственным разрешением 10 км. При этом для модели WRF были произведены расчеты с 3-мя типами исходных данных: Era-Interim, CFSR (The Climate Forecast System Reanalysis) и FNL (Final Operational Global Analysis data). Было показано, что расчёт атмосферного воздействия с высоким пространственным разрешением по негидростатической модели WRF позволяет воспроизводить экстремальный нагон с более высокой точностью, чем с помощью глобального атмосферного реанализа с более грубым пространственным разрешением. Результаты расчёта штормового нагона 2014 г. показали, что в отличие от нагона 2013 г., для его максимума обнаруживается переоценка чуть ли не на 0.5 м. По-видимому, главная причина этого заключается в том, что шторм 2014 г. привёл существенно большему, почти на 0,5 м нагону, чем в 2013 г. Поэтому эффекты затопления, ограничивающие повышение уровня моря, должны быть для экстремального шторма 2014 г. более существенны, чем для шторма 2013 г. Поскольку в настоящее время модель INMOM не учитывает эффекты затопления/осушения, то это и могло привести к переоценке максимального повышения уровня моря в период нагона сентября 2014 г.

Литература

1. Володин Е. М., Дианский Н. А., Гусев А. В. Воспроизведение современного климата с помощью совместной модели общей циркуляции атмосферы и океана INMCM 4.0. Известия РАН. Физика атмосферы и океана, 2010, Т. 46, № 4, С. 448–466.
2. Володин Е.М., Дианский Н.А., Гусев А.В. Модель земной системы INMCM4: воспроизведение и прогноз климатических изменений в 19-21 веках. Известия РАН, физика атмосферы и океана, 2013, Т. 49, № 4, с. 379–400.
3. Дианский Н.А., Кабатченко И.М., Фомин В.В., Архипов В.В., Цвецинский А.С. Моделирование гидрометеорологических характеристик в Карском и Печорском морях и расчет наносов у западного побережья полуострова Ямал. Вести газовой науки. 2015. № 2(22). С. 98–105.
4. Дианский Н.А., Фомин В.В. Моделирование циркуляции Азовского моря и особенности воспроизведения экстремальных нагонов в Таганрогском заливе. Труды ГОИН. 2017. № 218. (в печати).
5. Danabasoglu, G., Yeager S.G., Bailey D., et al. North Atlantic simulations in Coordinated Ocean-ice Reference Experiments phase II (CORE-II). Part I: Mean states // Ocean Modelling. 2014. V. 73. P. 76–107.

6. Danabasoglu, G., Yeager S.G., Kim W.M. et al. North Atlantic simulations in Coordinated Ocean-ice Reference Experiments phase II (CORE-II). Part II: Inter-annual to decadal variability // Ocean Modelling. 2016. V. 97. P. 65–90.
7. IPCC, 2007: Climate Change 2007: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fourth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change [Solomon, S., D. Qin, M. Manning, Z. Chen, M. Marquis, K.B. Averyt, M. Tignor and H.L. Miller (eds.)]. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom and New York, NY, USA, 996 pp.
8. IPCC. 2013. Climate Change 2013: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change [Core Writing Team, T. F. Stocker, D. Qin, G. K. Plattner, M. Tignor, S. K. Allen, J. Boschung, A. Nauels, Y. Xia, V. Bex and P. M. Midgley (eds.)] Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom and New York, NY, USA, 1535 pp.

ПРОБЛЕМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЛИЧИНЫ ДРЕВНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПО ОКЕАНИЧЕСКИМ БАЗАЛЬТАМ

м. н. с. *Целебровский А.Н.*

Исследована естественная остаточная намагниченность (NRM) подводных базальтов, отобранных в рифтовых зонах Срединно-Атлантического хребта (САХ) и Красного моря. Путем лабораторного моделирования показано, что компоненты намагниченности термоостаточной и химической природы (CRM) в океанических базальтах могут быть разделены с использованием методики Телье-Кое.

Установлено, что скорость разрушения химической остаточной намагниченности в примерно четыре раза ниже скорости образования парциальной термоостаточной намагниченности в циклах Телье. Спектр блокирующих температур химической компоненты смещён в сторону больших температур по отношению к спектру первичной термоостаточной намагниченности.

Выявлено, что вклад химической компоненты в NRM растет с возрастом океанских базальтов, определенным из анализа аномального геомагнитного поля (АГП) и теории спрединга. В базальтах возрастом 0.2 млн лет CRM составляет менее 10%, 0.35 млн лет — менее 50%, около 1 млн лет — от 60 до 80% [1].

Определена палеонапряженность геомагнитного поля (Ндр) по остаточной намагниченности образцов базальтов разного возраста, соответствующего эпохам полярности геомагнитного поля Брюнес, Матуяма, Гаусс. Величина Ндр, определенная по базальтам южного сегмента САХ варьировалась в пределах от 17.5 А/м до 42.5 А/м, по базальтам хребта Рейкьянес — 20.3–44 А/м, по базальтам хребта Буве — 21.7–34.1 А/м. Рассчитанные по этим данным значения VADM хорошо согласуются с международным банком данных [2] изменения интенсивности геомагнитного поля и моделью PISO–1500 [3].

Литература

1. Максимочкин В. И., Целебровский А. Н. Влияние химической намагниченности океанических базальтов на определение палеоинтенсивности геомагнитного поля методом Телье // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. – 2015. – № 6. – С. 136–143.
2. http://www.brk.adm.yar.ru/palmag/file/borokpintmdb.zip.
3. Channell JET, Xuan C, Hodell DA (2009) Stacking paleointensity and oxygen isotope data for the last 1.5 Myr (PISO-1500). Earth Planet Sci Lett 283:14–23.

ШТОРМОВЫЕ ВОЛНЫ В ОКЕАНЕ

Проф.-конс. *Шелковников Н.К.*

В настоящее время по мнению некоторых зарубежных и российских ученых принято считать, что в мировом океане якобы существует особый вид волн в виде «волн-убийц». Считается, что высота этих волн может достигать 30 м. Эти огромные одиночные волны возникают как бы «ниоткуда» и в считанные минуты исчезают «в никуда». Кроме того, ВУ возникают «сами по себе», как естественное явление. При этом не важно, есть ли ветер или нет его. Более того, ВУ могут возникать из-за нелинейного взаимодействия волн друг с другом (явление волнового хаоса).

Такое представление о ВУ с нашей точки зрения является сомнительным, а иногда даже близким к мифическому. С другой стороны известно, что для понимания механизмов формирования морских волн, в том числе приливов, волн цунами и ветровых волн необходимо учитывать причины их вызывающие. Этими причинами являются сейсмические процессы в земной коре, влияние Луны и Солнца, а также воздействие на морскую поверхность турбулизированного потока воздуха (ветра).

Поверхностные ветровые волны в океане являются яркой иллюстрацией процесса взаимодействия атмосферы и океана. Параметры таких волн изменчивы и определяются в основном средней скоростью ветра U и продолжительностью его действия, с увеличением которого высота волн h, их период T и длина λ растут. Однако, темпы роста параметров волн незначительны, так что типичные времена раскачки энергонесущих компонент волн превышают периоды самих волн на несколько порядков. Для типичного в океане диапазона значений U = 10–30 м/с фазовая скорость таких волн $C \approx U$, а их длина и высота по данным измерений имеют следующие значения: $T \approx 50–20$ с, $h \approx 2–10$ м.

Анализ наблюдений, проведенных автором в Тихом, Атлантическом океанах, а также в Черном и Средиземном морях, показал, что при условиях глубокого моря (глубина H >> λ) наблюдается периодическое появление цугов волн с одной максимальной волной («девятый вал»). Огромные одиночные волны в глубоком океане не наблюдаются. Они могут быть в шельфовой зоне только при условии мелкого моря и над топографическими особенностями морского дна (банки, хребты), где могут иметь место те же условия мелкого моря.

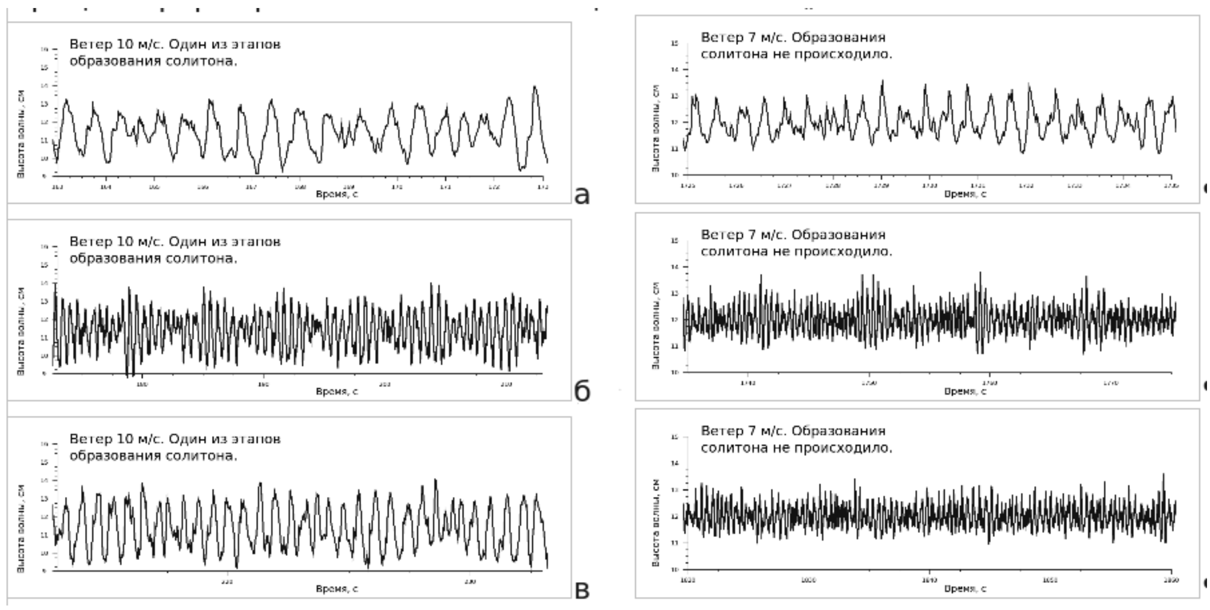


Рис. 1.

Для более детального исследования механизмов формирования цугов волн в условиях глубокой воды и уединенных (одиночных) волн в условиях мелкой воды нами были проведены эксперименты в лабораторном кольцевом аэрогидроканале. Внешний и внутренний его диаметры составляли соответственно 202 см и 165 см, высота — 40 см.

Было показано, что при развитии ветрового процесса периодически возникали цуги волн с наличием «девятого вала». На рис 1 показано что после фрагмента волнограммы 1а с периодическими волнами (перемежаемость), практически сразу формируются цуги волн (фрагмент записи 1б). Следующим этапом (рис 1в) снова была «перемежаемость». В дальнейшем цикл повторялся и опять следовал участок с цугами (не показанный на рисунке). Слева представлены фрагменты волнограммы, где развитие волнения завершалось образованием уединенной волны (при скорости ветра 10 м/с), а справа — в условиях, где ее формирование не наблюдалось (при меньшем ветре 7 м/с). Как слева, так и справа видны те же последовательности «перемежаемостей» и цугов волн. С увеличением ветра цугообразование было более выражено, но последовательность этапов сохранялась.

Литература

1. *Шелковников Н.К.* «Экстремальные волны в океане» //Известия РАН. Серия физическая, 2016 , **80**, № 2, с. 216–219.

Подсекция:

ГАЗОДИНАМИКА, ТЕРМОДИНАМИКА И УДАРНЫЕ ВОЛНЫ

Сопредседатели
профессор Н. Н. Сысоев, профессор И. А. Знаменская,
профессор В. М. Шибков

ЭЛЕКТРОДНЫЙ РАЗРЯД ПОСТОЯННОГО ТОКА, СОЗДАВАЕМЫЙ В ПОТОКЕ ВОЗДУХА

Физик *Логунов А.А.*, проф. *Шибков В.М.*, в. н. с. *Шибкова Л.В.*, студ. *Андриенко А.А.*, студ. *Кокоулин Н.М.*
shibkov@phys.msu.ru

Целью работы является экспериментальное изучение нестационарного пульсирующего в сверхзвуковом потоке воздуха разряда, создаваемого с помощью источника постоянного напряжения [1]. Экспериментальный стенд включает в себя вакуумную камеру, ресивер высокого давления воздуха, систему для создания сверхзвукового потока, прямоугольный аэродинамический канал, высоковольтный источник питания для создания газоразрядной плазмы, систему синхронизации и диагностическую аппаратуру. Аэродинамический канал помещался внутрь металлической цилиндрической барокамеры с диаметром 1 м и длиной 3 м. Сверхзвуковой поток в аэродинамическом канале создавался при заполнении барокамеры воздухом через специально профилированное сопло Лаваля. Разряд постоянного тока формировался между двумя хорошо обтекаемыми воздушным потоком электродами. Электроды монтировались внутри расширяющегося аэродинамического канала. Специальная конфигурация электродов позволила легко реализовать разряд постоянного тока без его дополнительной инициации в широком диапазоне давления в барокамере $p = 10 - 760$ Торр. Для создания разряда использовался источник питания, обеспечивающий выходное напряжение до 5 кВ, разрядный ток до 20 А при длительности импульса до 2 с. Расход воздуха в эксперименте мог изменяться от 10 г/с до 125 г/с. Для изучения динамики данного разряда использовалась высокоскоростная цифровая видеокамера «ВидеоСпринт».

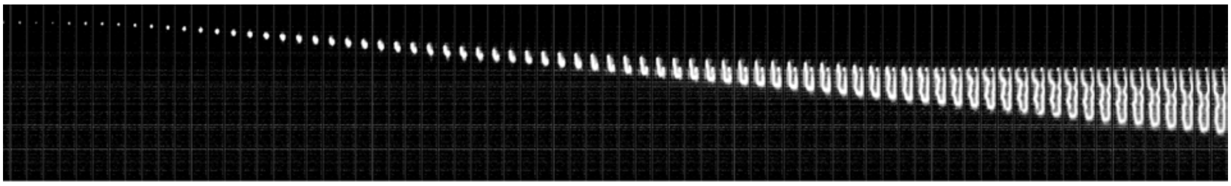


Рис. 1.

На рис. 1 представлен фрагмент хронограммы, характеризующий динамику пульсирующего разряда, создаваемого в высокоскоростном воздушном потоке. Исследуемый разряд представляет собой тонкий плазменный канал, вытягиваемый потоком вниз по его распространению. При подаче на электроды постоянного напряжения по кратчайшему расстоянию между ними происходит пробой воздуха. Образующийся при этом плазменный канал начинает скользить по электродам в направлении высокоскоростного воздушного потока. Двигаясь внутри межэлектродного промежутка плазменный канал искривляется. Это связано с тем, что при обтекании электродов сверхзвуковым потоком вблизи электродов образуется пограничный слой, скорость газа в котором меньше скорости в невозмущенном потоке. При этом скорости перемещения анодного и катодного пятен вдоль электродов меньше, чем скорость центральной части канала. Анодное пятно раньше достигает кончика первого электрода и фиксируется на нем. Затем на кончике второго электрода фиксируется катодное пятно. Плазменный канал продолжает вытягиваться вниз по потоку. Длина канала увеличивается, падение напряжения на нем растет и может превысить пороговое значение для повторного пробоя. Пробой может реализовываться вблизи минимального расстояния между электродами, шунтируя весь плазменный канал, свечение которого начинает уменьшаться и канальная плазма постепенно распадается. К этому времени уже сформировался новый плазменный канал и процесс повторяется. Повторный пробой может также реализоваться между анодной и катодной частями плазменного канала или между электродами. В любом случае повторный пробой приводит к шунтированию оставшейся части канала. Данный разряд постоянного тока, создаваемый в воздушном потоке, в принципе, представляет собой нестационарный пульсирующий разряд.

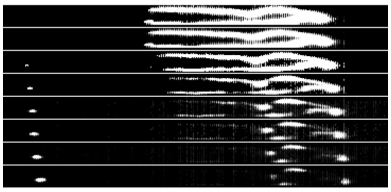


Рис. 2.

Для того чтобы зафиксировать одновременно существующие повторный пробой и достигший максимального размера плазменный канал были проведены съемки при частоте повторения кадров 32000 Гц в режиме включения прореживания на видеокамере, когда регистрируется только каждая четвертая строка, при полностью открытой диафрагме и времени экспозиции одного кадра 10 мкс. На рис. 2 представлены восемь последовательно снятых таким образом фотографий пульсирующего разряда. Видно, что формирование нового плазменного канала происходит при еще существующей предыдущей петле. На первых двух фотографиях наблюдается плазменная петля, достигшая в условиях эксперимента максимального размера. На третьей фотографии можно видеть момент повторного пробоя, приводящий к формированию нового плазменного образования в области кратчайшего расстояния между электродами при существующей плазменной петле. На следующих пяти фотографиях виден разрыв петли, следующая за этим стадия деионизации плазмы, приводящая к исчезновению разрядного канала. При этом в области повторного пробоя начинает формироваться новый канал, который постепенно сносится вниз по сверхзвуковому потоку. В течение всего этого времени разрядный ток не прерывается, и его пульсации не превышают 5 %.

Пульсирующий характер разряда в сверхзвуковом потоке приводит к осцилляции напряжения на разрядном промежутке (рис. 3), разрядного тока (рис. 4) и свечения плазмы. Особенно сильными являются пульсации напряжения и свечения плазмы. Получено, что модуляция напряжения на разряде достигает 100 %, тогда как модуляция разрядного тока порядка 5 %. Это связано с тем, что в любой момент времени между электродами существует плазменная перемычка, ее длина изменяется во времени, однако разрушение токовой петли происходит только после повторного пробоя и образования новой плазменной перемычки. На рис. 5 представлена вольт-амперная характеристика изучаемого разряда, зафиксированная в промежуток времени существования одной петли при отсутствии повторных пробоев. Видно, что она имеет немонотонный вид. Одному и тому же значению тока соответствует два значения напряжения на разряде. Показано, что температура электронов при i = 10.8 А уменьшается вниз по потоку от 13 000 К при z = 0 до 7 000 К при z = 5 см. Координата z = 0 соответствует концу электродов. С ростом разрядного тока от 2 до 16 А температура электронов, измеренная вблизи электродов, увеличивается от 10 000 К до 15 000 К. Показано, что с ростом разрядного тока от 2 до 16 А концентрация электронов увеличивается от 3×10^{14} см$^{-3}$ до 3×10^{16} см$^{-3}$.

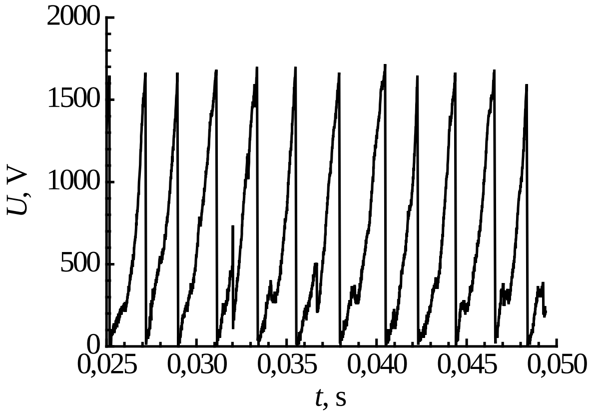


Рис. 3.

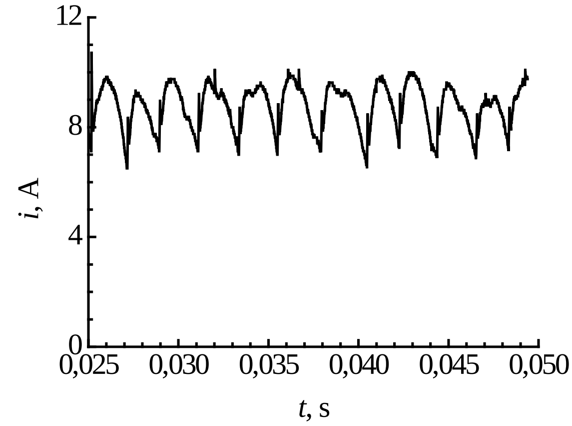


Рис. 4.

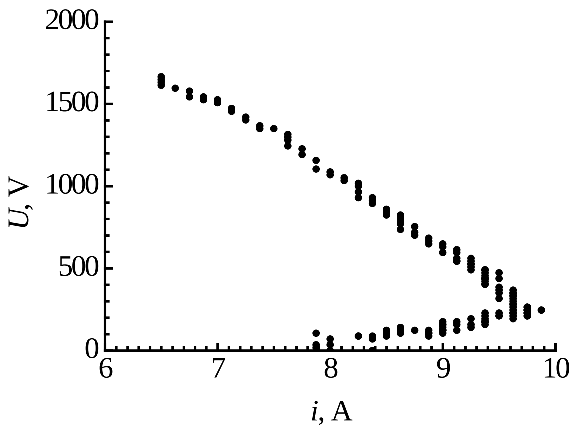


Рис. 5.

Литература

1. В.М. Шибков, Л.В. Шибкова, А.А. Логунов. Параметры плазмы пульсирующего в сверхзвуковом потоке воздуха разряда постоянного тока. // Физика плазмы. 2017, т. 43, № 3, с. 314–322.

ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПУЛЬСИРУЮЩЕГО РАЗРЯДА В ДОЗВУКОВЫХ И СВЕРХЗВУКОВЫХ ВОЗДУШНЫХ ПОТОКАХ

Физик *Логунов А.А.*, проф. *Шибков В.М.*, в. н. с. *Шибкова Л.В.*,
студ. *Андриенко А.А.*, студ. *Кокоулин Н.М.*
shibkov@phys.msu.ru

Целью работы является изучение влияния на параметры плазмы и основные свойства скользящего вдоль электродов разряда постоянного тока, создаваемого в высокоскоростном воздушном потоке. Актуальность исследования связана с поиском механизмов, обеспечивающих быстрое плазменно-стимулированное воспламенение воздушно-углеводородных топлив в сверхзвуковых газовых потоках и поддержание их стационарного горения. Для этого необходимы данные об основных характеристиках газоразрядной плазмы, используемой в этих целях.

Для воспламенения и стабилизации горения воздушно-углеводородных топлив в условиях сверхзвукового потока нами применяются различного типа разряды, а именно, импульсные поперечные и продольно-поперечные разряды постоянного тока, свободно локализованный СВЧ разряд, создаваемый в сфокусированном пучке электромагнитного излучения сантиметрового диапазона длин волн, а также поверхностный СВЧ разряд, создаваемый на диэлектрической антенне. Было показано, что все эти разряды приводят к воспламенению газообразных и жидких углеводородных топлив в сверхзвуковом воздушном потоке, однако время задержки воспламенения сильно зависит от типа разряда. Так период индукции для воспламенения сверхзвуковых потоков воздушно-углеводородного топлива изменяется от нескольких миллисекунд до сотен микросекунд в зависимости от условий проведения экспериментов. Время воспламенения в условиях самостоятельных сверхвысокочастотных разрядов, существующих при больших значениях приведенного электрического поля E/N = 100–500 Тд, не превышает 5–50 мкс. В этом случае при скорости потока порядка 1 км/с воспламенение топлива происходит на расстоянии от 0.5 см до 5 см от области инициирования воспламенения, что существенно для сокращения продольных размеров двигателя.

Параметры самостоятельных объемных свободно локализованных и поверхностных СВЧ разрядов достаточно хорошо изучены. В данной работе изучается пульсирующий в сверхзвуковом потоке воздуха разряд постоянного тока, который является, по существу, скользящим по электродам специальной конфигурации нестационарным пульсирующим разрядом, создаваемым с помощью источника постоянного напряжения.

Исследования проводились с помощью диагностического комплекса, состоящего из монохроматоров и спектрографов с цифровой регистрацией спектра, высокоскоростной цифровой видеокамеры, датчиков давления, цифровых фотоаппаратов, осциллографов, компьютеров. Спектр излучения газоразрядной плазмы фиксируется с помощью двухканального спектрографа AvaSpec-2048-2-DT фирмы Avantes, с обратной линейной дисперсией 0.05 нм/мм для первого канала и 0.32 нм/мм для второго. Излучение газоразрядной плазмы при помощи системы линз и световодов проецировалось на входные щели спектрального прибора, при этом пространственное разрешение по длине плазменного канала не превышало 2 мм. Минимальное время экспозиции 20 мс.

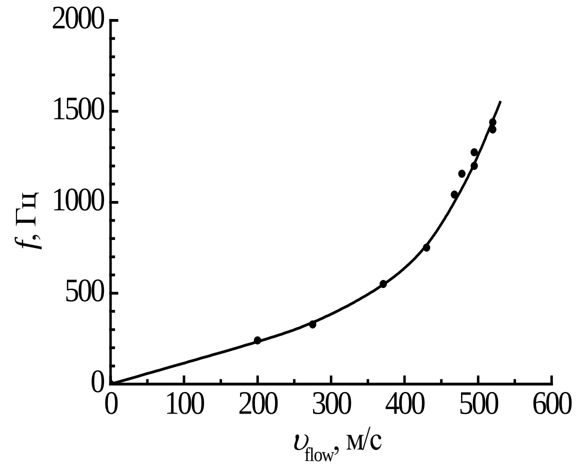


Рис. 1.

Для изучения динамики данного разряда проводилась регистрация с временным разрешением общего вида разряда с помощью высокоскоростной цифровой видеокамеры «ВидеоСпринт» с электронно-оптическим наносекундным затвором при различных разрядных токах и скоростях воздушного потока 170–520 м/с, соответствующих числам Маха потока M = 0.5–2.

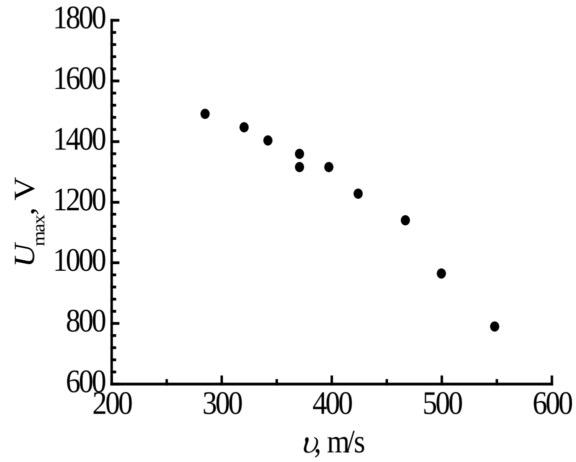


Рис. 2.

В эксперименте были получены хронограммы, характеризующие динамику пульсирующего разряда при различных скоростях дозвуковых и сверхзвуковых воздушных потоков. Это позволило получить зависимости частоты пульсации разряда и длины плазменного канала от скорости потока при различных значениях разрядного тока. Эксперименты проводились при изменении давления воздуха в барокамере от 10 Торр до 760 Торр. Показано что с ростом скорости воздушного потока при фиксированном значении разрядного тока длина плазменного канала уменьшается, а частота пульсации растет (рис. 1). При сверхзвуковых скоростях с увеличением скорости потока напряжение на разряде уменьшается при всех значениях разрядного тока (рис. 2). Показано, что напряженность электрического поля в плазме за время развития плазменного канала остается практически постоянной (рис. 3), но изменяется при изменении разрядного тока и скорости воздушного потока (рис. 4). Постоянство напряженности электрического поля во времени позволяет проводить измерения концентрации электронов и температуры электронов с использованием цифрового спектрографа с минимальной временной экспозицией 20 мс.

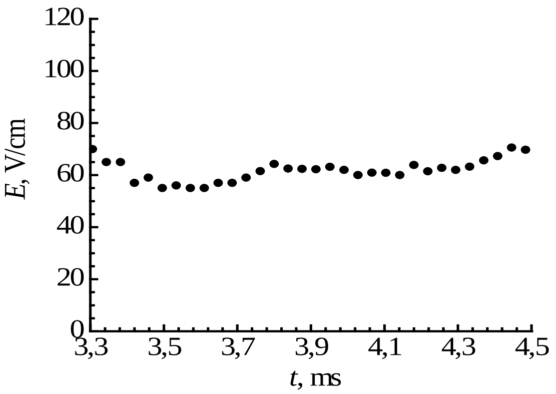


Рис. 3.

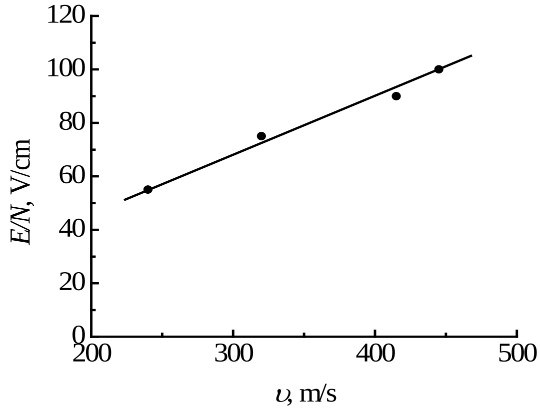


Рис. 4.

На рис. 5 представлена зависимость минимального значения разрядного тока от скорости потока. При этом значение максимального значения пульсирующего тока остается постоянной при всех значениях скорости потока.

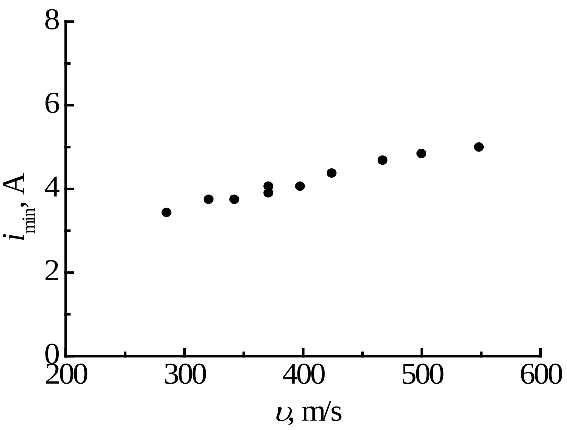


Рис. 5.

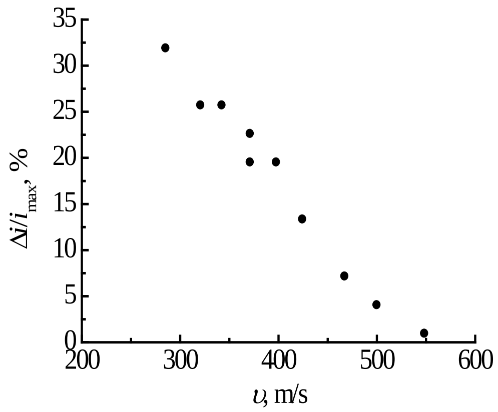


Рис. 6.

На рис. 6 представлена зависимость величины пульсации разрядного тока от скорости потока. Видно, что при скорости воздушного потока 550 м/с регистрируются минимальные пульсации разрядного тока. Величина пульсаций растет с уменьшением скорости потока и достигает величины 30 % при дозвуковой скорости. Однако при всех значениях скорости потока наблюдается сильная сто процентная модуляция напряжения на разряде и свечения плазмы.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛАЗМОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НАНОСЕКУНДНОГО ДИАПАЗОНА ПРИ ФОРМИРОВАНИИ УДАРНЫХ ВОЛН ОТ ИМПУЛЬСНЫХ РАЗРЯДОВ

Проф. *Знаменская И.А.*, проф. *Сысоев Н.Н.*, доц. *Мурсенкова И.В.*, асп. *Дорощенко И.А.*, асп. *Кузнецов А.Ю.*

На установке УТРО-3 проведены исследования с целью анализа динамики свечения плазмы импульсных разрядов: поверхностного разряда типа “плазменный лист” [1] и комбинированного объемного разрядас плазменными электродами[2]. Исследовался временнойинтервал 100–12000нс в неподвижном воздухе и в потоке (за фронтом плоской ударной волны) в канале ударной трубы. Давление менялось от 5 до 300торр, импульсное напряжение составляло 20–30 кВ.

С помощью камеры БИФО К008 получены развертки свечения плазмы разрядов при различных режимах инициирования,время развёрток составляло от 200 нс до 2 мкс. Щель камеры К008 располагалась перпендикулярно каналам разряда под небольшим углом наклона к плоскости разряда (рис. 1). С помощью камеры БИФО К011 получены соответствующие кадры свечения плазмы поверхностного разряда (рис. 2).

По разверткам свечения получены зависимости интенсивности свечения разрядов от времени как вдоль отдельных линий, так и усреднённые по выбранной прямоугольной области. Установлены зависимости полной длительности свечения разрядов, средней длительности и времени затухания свечения от давления в разрядной камере.

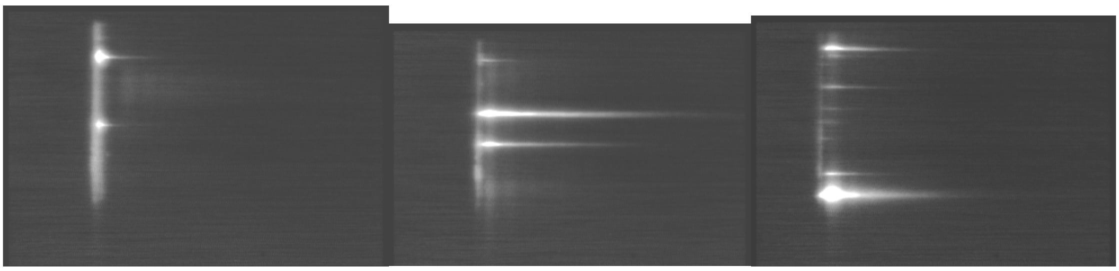


Рис. 1. Развертки свечения поверхностных разрядов при давлении 15, 63, 160 торр. Длительность развертки 2000 нс. Напряжение 25 кВ.

Путем обработки полученных разверток свечения определялось время затухания свечения после прекращения тока разряда. Эта величина характеризует скорость процесса дезактивации электронных состояний молекул азота в плазме воздуха, так как спектр излучения разрядов определяется в основном полосами второй положительной системы азота [1, 3]. Зависимости интенсивности свечения разрядов от времени имеют характерную куполообразную форму с плавным спадом интенсивности.

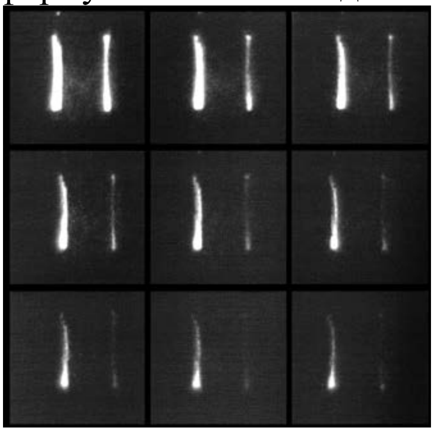
а)  б) 

Рис. 2. а) 9-кадровая регистрация свечения поверхностных разрядов (экспозиция 100 нс, интервал между кадрами 100 нс); б) фотоизображение свечения поверхностных разрядов. Давление 150 Торр, напряжение 25 кВ.

Проведено сравнение плазмодинамических характеристик свечения и тока наносекундных разрядов — объемного и поверхностного при давлении 5–100торр). Показано, что время протекания тока при различных условиях не превышает 400 нс, в то время как длительность свечения может достигать нескольких микросекунд. Времена затухания излучения объемного разряда и диффузныхканалов поверхностного разряда в неподвижном воздухе слабо близки к значению ~40 нс при давлении меньше 80 торр (см. рис. 3). Время затухания свечения объемного разряда уменьшается с ростом давления [3]. Время затухания диффузного свечения поверхностного разряда слабо растет при давлении до 60 торр, а затем значительно возрастает (рис. 3).Время затухания свечения ярких каналов поверхностного разряда растет с ростом давления.

Область поверхностного разряда состоит из параллельных каналов разной интенсивности (рис. 2 б), развивающихся за время ~30 ns. Отдельные каналы повышенной интенсивности характеризуются также более ярким видимым свечением. В области каналов повышенной яркости взрывные волны более интенсивны, и образуют полуцилиндрические участки, выделяющиеся из общего фронта. Проводилась теневая визуализация зоны разряда на основе высокоскоростной цифровой камеры. Важным преимуществом высокоскоростной съёмки явилась возможность проследить эволюцию ударно-волновой структуры в случае каждого конкретного эксперимента, поскольку структура разряда, как правило, отличается в каждом случае инициирования разряда, и соответственно отличается эволюция ударно-волновой конфигурации. Теневая визуализация позволила проследить динамику газодинамических разрывов в интервале времени от 2 мкс до 2000 мкс после разряда, с интервалом между кадрами от 3 мкс.

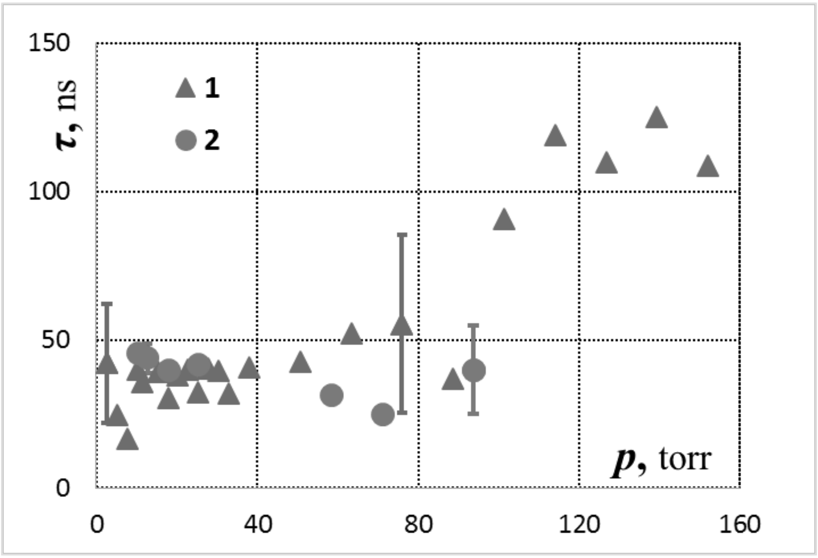


Рис. 3. Зависимость времени затухания свечения диффузной формы поверхностного разряда (1) и объёмного разряда (2) от давления.

На фотоизображениях (интегральных по времени свечения плазменного листа) излучение ярких каналов неравномерно по их длине. Ранее было показано, что видимое свечение разряда по времени существенно превышает время протекания тока разряда. Проведён анализ однородности плазменного энерговклада вдоль разрядных каналов по анализу течения, формирующегося после разряда. Для исследования был применён метод цифровой трассерной анемометрии (ParticleImageVelocimetry, PIV). Анализ формы фронта ударных волн и распределения скорости потока за ними показал, что мгновенный энерговклад, обеспечиваемый плазменным листом, однороден вдоль направления разрядных каналов, при том что интегральное видимое свечение плазмы ослабевает вдоль направления распространения каналов плазменного листа. Таким образом, неоднородность свечения, очевидно, создается в основном накоплением светового потока при длительном послесвечении разряда. По результатам экспериментов показано, что поля скоростей, полученные с двух ракурсов, близки по значениям при близких значениях интенсивности свечения канала, скорости газа достигают 170 м/с.

Таким образом, показано, что разряд такого типа позволяет контролируемо воздействовать на поток газа, в том числе — высокоскоростной. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 15-08-02417 и Программы развития МГУ до 2020 года.

Литература

1. Знаменская И.А., Латфуллин Д.Ф., Луцкий А.Е., Мурсенкова И.В., Сысоев Н.Н.Развитие газодинамических возмущений из зоны распределенного поверхностного скользящего разряда. // ЖТФ. 2007. Т. 77 № 5. С. 10–18.
2. Архипов Н.О., Знаменская И.А., Мурсенкова И.В., Остапенко И.Ю. Эволюция наносекундного комбинированного объемного разряда с плазмен-

ными электродами в потоке воздуха.// Вестник МГУ, Сер. 3. Физика. Астрономия. 2014. № 1. С. 88–95.
3. Кузнецов А.Ю., Мурсенкова И.В. Особенности излучения объемного наносекундного разряда в воздухе при взаимодействии с плоской ударной волной. // Прикладная физика. 2016. № 5. С. 16–21.

ТЕРМОГРАФИЧЕСКАЯ ВИЗУАЛИЗАЦИЯ И АНАЛИЗ ИЗОБРАЖЕНИЙ ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ В ОБЛАСТИ ЛИЦА

Проф. *Знаменская И.А.*, с.н.с. *Коротеева Е.Ю.*, с.н.с. *Хахалин А.В.*, м.н.ср. *Шишаков В.В.*, доц. *Исайчев С.А.*, проф *Черноризов А.М.*

В последние годы наблюдается все возрастающий интерес к развитию новых методов и технологий надежного бесконтактного мониторинга основных биофизических показателей организма. Методы, основанные на использовании инфракрасной (ИК) термографии с этой точки зрения представляются на данный момент весьма перспективными. Современные тепловизионные системы позволяют регистрировать распределение ИК излучения от объектов с высоким временным, пространственным и температурным разрешением. Это дает возможность не только дистанционно визуализировать, но и количественно измерять малейшие изменения теплового потока от поверхности тела [1]. В частности, доступна регистрация быстропротекающих тепловых процессов в области лица, реализующихся в коротких интервалах времени (1–4 с), соизмеримых со временем протекания эмоциональных реакций [2]. Значительный прогресс в тепловизионных исследованиях на сегодняшний день обусловлен также созданием и оптимизацией алгоритмов обработки, а также компьютерных методов сопоставления результатов тепловизионной съемки с данными, полученными с привлечением других измерительных систем.

Представленная работа направлена на создание технологии комплексной регистрации и анализа активности центральной и периферической нервной системы с использованием тепловизора (в сочетании с видеокамерой) на основе динамических тепловых полей в области лица. Предложена технология комплексной регистрации и анализа активности центральной и периферической нервной системы с использованием тепловизора:

1. по визуализации и анализу струйных дыхательных течений в широком диапазоне углов обзора; 2. по регистрации пульсационных характеристик кровотока в выделенных областях; 3. по регистрации проявления активности потовых желез. Также исследуется взаимосвязь тепловизионных данных с данными физических измерений электродермальной активности (кожно-гальванической реакции или КГР) и психофизиологической оценкой уровня эмоционального возбуждения человека.

Для проведения инфракрасной съемки в экспериментах были использованы (по отдельности) две тепловизионные камеры: 1. FLIRSC7700 в диапазоне длин волн 3.7–4.8 мкм (MWIR) с частотой регистрации до 115 Гц с разрешением 640×512 пикселей; 2.COXCX640 — диапазон длин волн 8–14 мкм с частотой до 50 Гц. В экспериментах принимали участие 17 здоровых испытуемых (12 мужчин и 5 женщин) в возрасте от 19 до 55 лет.

Термографическая регистрация дыхательного процесса возможна за счет двух механизмов: 1. локального периодического нагрева кожи лица вниз и по бокам от ноздрей (области интереса); 2. визуализации в ИК диапазоне за счет разницы в составе вдыхаемого и выдыхаемого воздуха (до 4–5% углекислого газа и пары воды в выдыхаемом потоке).

Показано, что периодическое изменение температуры областей интереса стабильно наблюдается при регистрации ИК излучения от поверхности кожи анфас как в средневолновом, так и длинноволновом диапазоне (рис. 1, *а*).

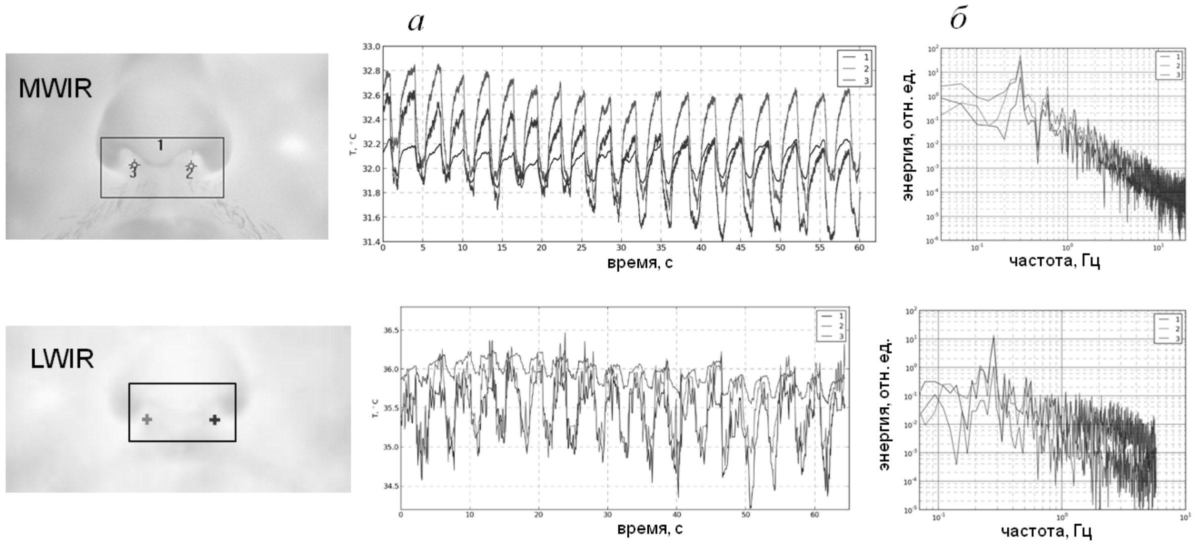


Рис. 1. Регистрация дыхательного процесса анфас MWIR (вверху) и LWIR (внизу) камерами: *а* — динамика среднего значения температуры в выделенных областях; *б* — результат спектрального преобразования ИК сигнала.

Для количественного анализа дыхательных циклов проводился спектральный анализ тепловых пульсаций турбулентного потока на основе алгоритма быстрого преобразования Фурье (FFT). Получено, что регистрации полей ИК излучения течение 20 секунд со скоростью от 5 Гц достаточно, чтобы исследовать эволюцию и частотные характеристики дыхания с высокой точностью (рис. 1, *б*). При этом возможность визуализации выдыхаемого потока и расчета частоты дыхания сохраняется при повороте головы вплоть до 150° от оси камеры.

Показано, что открытие потовых пор на поверхности кожи приводит к быстрому появлению и исчезновению темных (более холодных) точек на термограмме. Это связано с тем, что пот обладает несколько иным, по сравнению с кожным покровом, коэффициентом излучения; кроме того, в результате испарения капель пота происходит охлаждение кожи вблизи каналов потовых желез. Пример динамики температуры областей интереса и эндотермического сигнала представлен на рис. 2.При регистрации подкожного кровотока показано, что эффект от нагрева наружного слоя кожи имеет уровень теплового шума.

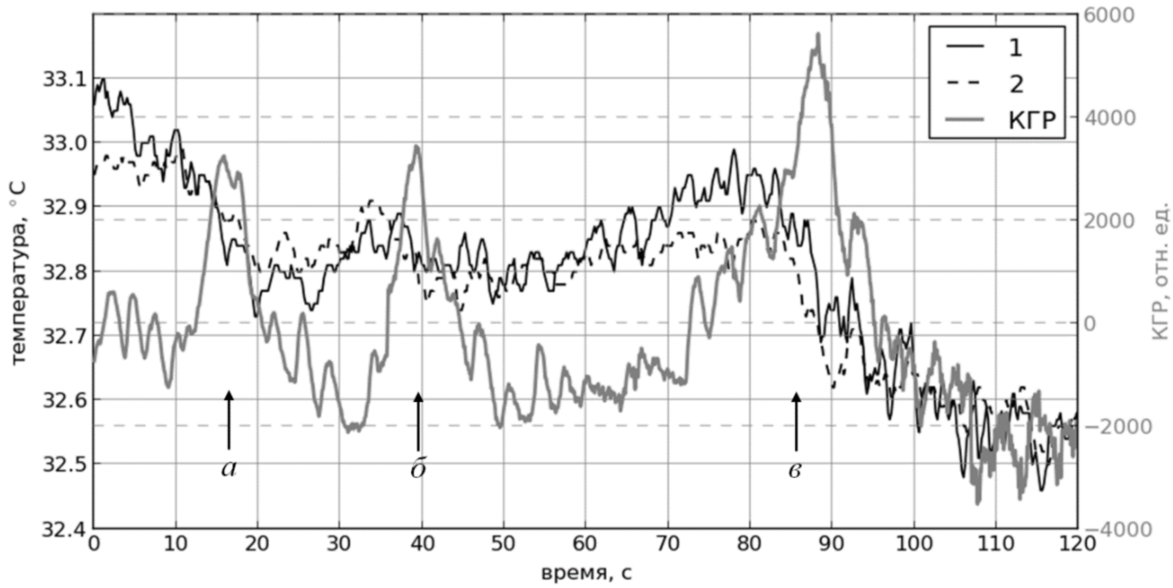


Рис. 2. Зависимость средней температуры областей интереса от времени записи и соответствующая временная развертка КГР сигнала: *а* — глубокий вдох; *б* — резкий звук; *в* — начало прохождения теста Струпа.

Создан программный модуль для сопоставления изображения с видеокамеры и тепловизионной камеры; с учетом компенсации движений лица человека. Создан и протестирован программный модуль для приведения изображения теплового поля на лице к стандартному представлению (по изображению в видимой области спектра). Анализ показывает, что обеспечить измерение локальных пульсаций кровотока даже на близком расстоянии и при малых изменениях положения лицаалгоритмы компенсации движений лица человека не позволяют. Между тем результаты анализа тепловых полей, формируемых различными физиологическими процессами на лице человека и в окружающем пространстве (дыхание и потоотделение) показали, что инфракрасная термография открывает широкие возможности дистанционной диагностики эмоциональных состояний.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант 16-18-00080).

Литература

1. Иваницкий Г.Р. Современное матричное тепловидение в биомедицине. Успехи физических наук. Т. 176, С. 1293–1320.2006.

2. ЗнаменскаяИ. А., КоротееваЕ. Ю., ХахалинА. В., ШишаковВ. В. Термографическая визуализация и дистанционный анализ динамических процессов в области лица. Научнаявизуализация. Т. 8(5). С. 1–8. 2016.
3. B. G. Vainer. FPA-based infrared thermography as applied to the study of cutaneous perspiration and stimulated vascular response in humans. Phys. Med. Biol. Vol. 50 (23). P. R63. 2005.

РАЗВИТИЕ КОНВЕКЦИИ В ПРИПОВЕРХНОСТНОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ

асп. *Пуштаев А.В.*, проф. *Уваров А.В.*, с. н. с. *Винниченко Н.А.*, асс. *Плаксина Ю.Ю.*

Конвективные процессы широко распространены в природе и технике и отличаются большим разнообразием. В данной работе рассматривается вопрос о том, какие течения возникают при резком нагреве снизу или охлаждении сверху (за счет испарения) горизонтального слоя жидкости в поле силы тяжести. В отличие от классической постановки Рэлеем задачи об устойчивости слоя с постоянным линейным профилем температуры [1], рассматривается развитие процесса во времени при изначально однородном по температуре и плотности слое. При этом возникает существенно нелинейный и, кроме того, нестационарный профиль температуры, что приводит к существенному усложнению теоретического рассмотрения данной задачи. В настоящее время имеются два подхода к данной проблеме:

а) frozen time model — предполагается, что основной профиль температуры развивается значительно медленнее, чем возмущения и его можно считать стационарным [2];

б) amplification theory — рассматривается усиление специальных начальных возмущений до определенного задаваемого уровня [3].

Целью работы было более подробное экспериментальное изучение данной задачи с использованием современной тепловизионной техники.

Для верификации теоретических моделей необходимо опираться на надежные экспериментальные результаты. Современные тепловизоры обладают высоким пространственным и временным разрешением и позволяют достаточно хорошо зафиксировать момент начала конвекции и получить картину распределения температуры на поверхности. Как показали эксперименты по наблюдению поверхности испаряющейся после поднятия крышки воды в сосудах различных размеров и при разных начальных температурах (рис. 1.), образующиеся вначале (когда режим еще близок к линейному) вихревые структуры у поверхности не остаются доминирующими, а дробятся затем на более мелкие ячейки. Таким образом, в нелинейном режиме устойчивые вихревые структуры характеризуются меньшей длиной волны. Характерное время начала образования конвективных структур составляло десятки секунд, что дает глубину распространения тепловой волны $\sqrt{\chi t}$ для воды порядка несколько миллиметров при глубинах используемых емкостей от нескольких сантиметров. Существенно нелинейный основной температурный профиль позволяет говорить о механизме неустойчивости аналогичном механизму неустойчивости Рэлея-Тейлора с той лишь разницей, что здесь разность плотностей двух жидкостей создается температурой и между ними отсутствует поверхностное натяжение.

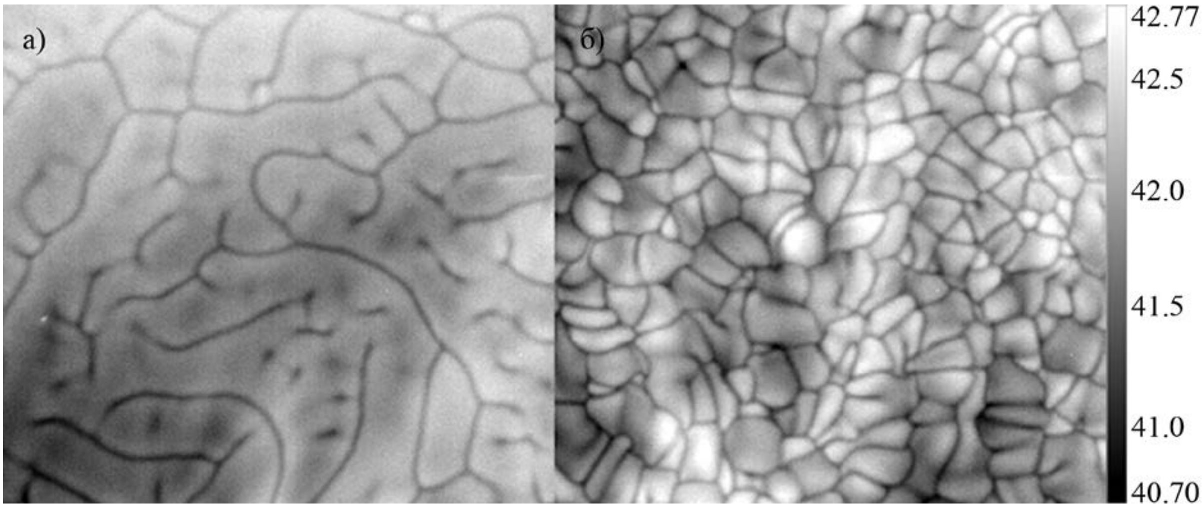


Рис. 1. Поле температуры на поверхности воды в моменты времени а) 15 с и б) 55 с после снятия крышки. Горизонтальный размер каждой области 20 см.

Для теоретического моделирования процесса конвекции у свободной поверхности жидкости необходимо задание на ней определенных граничных условий. Как правило, используют условие отсутствия горизонтальных напряжений или условие Пирсона для конвекции Марангони. Однако, как показали ранее проведенные эксперименты, все не так просто. Было показано [4], что при всплытии конвективной струи в этиловом спирте поля температуры и скорости полностью соответствуют теоретическим представлениям — теплая струя быстро растекается по поверхности за счет эффекта Марангони. Однако в дистиллированной воде возникает совершенно иная картина. Верхний слой воды остается неподвижным и поэтому скорость распространения струи у поверхности падает в несколько раз по сравнению с этанолом. В работе [5] было показано, что при наблюдаемой мозаичной тепловой структуре поверхности воды верхний слой неподвижен, конвекция Марангони не наблюдается, а движение жидкости происходит под поверхностью. Объяснение этого эффекта в настоящее время отсутствует, однако известно, что в деионизированной воде на поверхности наблюдается конвекция Марангони, то есть примеси, остающиеся в дистиллированной воде, оказывают существенное влияние на гидродинамику вблизи поверхности. Очень наглядным является сравнительный анализ движения водомерки на поверхности дистиллированной и деионизированной воды, наблюдаемого с помощью инфракрасной камеры. В дистиллированной воде водомерка перемещается по верхней неподвижной пленке, несмотря на наличие конвективных вихрей под ней. В деионизированной воде все ее ноги оказываются вовлечены в движение, причем в разных мелких вихрях, образующихся за счет эффекта Марангони. Это приводит к тому, что она начинает метаться по сосуду и пытается закрепиться на стенке (что соответствует ее поведению в водном потоке, однако поток в данном случае отсутствует). Таким образом, холодная пленка оказывается реальной пленкой с особыми свойствами, соответствующими граничному условию прилипания. Именно отсутствие обновления поверхности и приводит к механизму молекулярного переноса в холодной пленке и существенному скачку температуры на границах слоя (порядка градуса), который хорошо известен из наблюдений [6].

Для моделирования зависимости поля температур от времени используется, как правило, приближение постоянного потока, которое, однако, в реальности не выполняется из-за того, что поля температуры и скорости в воздухе не являются стационарными. Однако на начальной стадии охлаждение жидкости происходит за счет механизма теплопроводности. Тем самым из решения уравнения теплопроводности возможно найти временную зависимость потока тепла $Q(t)$ по экспериментальной зависимости средней по площади температуры поверхности от времени $T(t)$:

$$Q(t) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi\chi}} \int_0^t \frac{T'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau,$$

где λ — коэффициент теплопроводности, χ — коэффициент температуропроводности, $T'(t)$ — производная температуры по времени.

Литература

1. S. Chandrasekhar. Hydrodynamic and hydromagnetic stability // Clarendon Press, Oxford, 1961.
2. W. Lick. The instability of a fluid layer with time-dependent heating // J. Fluid Mech., 1965, vol. 21, part 3, pp. 565–576.
3. T.D. Foster. Stability of a homogeneous fluid cooled uniformly from above // Phys. Fluids, 1965, vol. 8, pp. 1249–1257.
4. N.A. Vinnichenko, A.V. Uvarov, Yu.Yu. Plaksina. Combined study of heat exchange near the liquid–gas interface by means of Background Oriented Schlieren and Infrared Thermal Imaging // Exp. Thermal and Fluid Science, 2014, vol. 59, pp. 238–245.
5. Yu.Yu. Plaksina, A.V. Uvarov, N.A. Vinnichenko, V.B. Lapshin. Experimental investigation of near-surface small-scale structures at water-air interface: Background Oriented Schlieren and thermal imaging of water surface // Russ. J. Earth Sci., 2012, vol. 12(4): ES4002.
6. К.Н. Федоров, А.И. Гинзбург. Приповерхностный слой океана // Л.: Гидрометеоиздат., 1988.

СОДЕРЖАНИЕ

Оригинал-макет: издательский отдел физического факультета МГУ

Подписано к печати 14.04.2017 г.
Объем 17,25 п.л. Тираж 100 экз. Заказ №

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
119991 Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, к. 2

Отпечатано в отделе оперативной печати
физического факультета МГУ